PROBLEMAS DE FÍSICA MATEMÁTICA

Espacios Lineales - Espacios de Hilbert

`Boletín 1`

Febrero de 2011

---

1. Repasa las definiciones de *cuerpo*, *anillo*, *grupo*, *módulo*, y utilízalas para dar la definición más económica posible de *espacio vectorial*.

2. Verifica el siguente caso particular de la desigualdad de Hölder:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i\, b_i|\right)^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_i|^2 \, \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2$$

3. Prueba que $\forall\, |x\rangle, |y\rangle \in V$ se cumple que $|\||x\rangle\| - \||y\rangle\|| \leq \||x\rangle - |y\rangle\|$.

4. Demuestra que la funcional $\| \ \|_\infty : \mathcal{C}[a,b] \to \mathbb{R}$, tal que $\||f\rangle\|_\infty = \max_{(a,b)} |f(x)|$, define una norma sobre el espacio de funciones, $\{|f\rangle\} \in \mathcal{C}[a,b]$.

5. Sean $|x\rangle, |y\rangle \in L^2[a,b]$. Demuestra que $\alpha|x\rangle + \beta|y\rangle \in L^2[a,b] \ \ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

6. Demuestra que $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_2)$ no es completo, mientras que $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ sí lo es. (Ayuda: define alguna sucesión de funciones continuas que converja a una función no continua, como por ejemplo la función escalón).

7. Aplica el proceso de Gramm-Schmidt al sistema de funciones $\{1, x, x^2, x^3\} \in L^2[-1,+1]$.

8. Prueba que

$$(|P_n\rangle, |P_m\rangle) = \frac{2}{2n+1}\delta_{m,n}\ , \qquad n, m : 0, 1, 2, \ldots$$

donde los *polinomios de Legendre* $|P_n\rangle \in L^2[-1,+1]$ se definen mediante

$$P_n(x) \equiv \frac{1}{2^n\, n!}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

Calcula, además, $P_0(x), P_1(x), P_2(x)$ y $P_3(x)$.

9. Considera la sucesión de funciones $|f_n\rangle$ dada por $f_n(x) = \frac{n}{2}\, e^{-n|x|}$.

- ¿Es $|f_n\rangle \in L^2(\mathbf{R})$?.
- ¿Es $|f_n\rangle$ una sucesión de Cauchy?.
- Analiza el límite $n \to \infty$ de $|f_n\rangle$.