Problemas de Física Matemática

Espacio Dual - Tensores

`Boletín 2`

Marzo de 2011

---

10. Considera la sucesión de funciones $|f_n\rangle$ dada por $\langle x|f_n\rangle = f_n(x) = \frac{n}{2}e^{-n|x|}$. Demuestra que $\lim_{n\to\infty} |f_n\rangle \notin L^2(\mathbb{R})$ y que, en cambio, $\lim_{n\to\infty}\langle f_n| \in L^{2\star}(\mathbb{R})$.

11. Sea V un espacio vectorial real de dimension $n = 3$. En una base $|\mathbf{e}_i\rangle$ la matriz de productos escalares es

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

– Obtén las componentes covariantes v_i del vector $|\mathbf{v}\rangle = 3|\mathbf{e}_1\rangle + |\mathbf{e}_2\rangle - 2|\mathbf{e}_3\rangle$.

– Para un operador $\mathbf{A}|\mathbf{e}_1\rangle = |\mathbf{e}_2\rangle + |\mathbf{e}_3\rangle$, $\mathbf{A}|\mathbf{e}_2\rangle = 2|\mathbf{e}_2\rangle - |\mathbf{e}_1\rangle$, $\mathbf{A}|\mathbf{e}_3\rangle = |\mathbf{e}_1\rangle - |\mathbf{e}_2\rangle$, define y calcula las dos formas asociadas $A^i{}_j$ y A_{ij}.

– ¿Cuál es la signatura de g_{ij}?

12. Sean $A^i{}_j$ $(i,j = 1,\ldots,d)$ las componentes de un operador lineal, A, en una cierta base de un espacio vectorial V $(\dim V = d)$, definimos el determinante

$$\det A \equiv A^1{}_{i_1} A^2{}_{i_2} \cdots A^d{}_{i_d}\, \epsilon^{i_1 i_2 \ldots i_d}$$

– Demuestra que $\det(A\,B) = \det A \,\det B$.

– Demuestra que bajo cambios de base $|\mathbf{e}_i\rangle \to |\mathbf{e}_{i'}\rangle$, el determinante es invariante $\det A = \det A'$. (Recuerda que, por definición, $\epsilon^{1\ldots d} = \epsilon_{1\ldots d} = 1$ en *cualquier base*).

13. En una base del espacio V de dimensión 2, $\{|\mathbf{e}_i\rangle,\ i = 1,2\}$, el tensor T_{ijk} tiene las siguientes componentes:

$$T_{111} = 1\ ,\ T_{112} = 2\ ,\ T_{121} = T_{222} = 0\ ,\ T_{122} = -1\ ,\ T_{211} = 3\ ,\ T_{212} = 4\ ,\ T_{221} = -3\ .$$

– Calcula $T_{(ij)k}$, $T_{[ij]k}$, $T_{(ijk)}$, y $T_{[ijk]}$

– Dado el tensor métrico $g_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula $T^{ij}{}_k$ y $T^{ik}{}_k$

– Escribe el cambio de base $|\mathbf{e}_{i'}\rangle = \Lambda^i{}_{i'}|\mathbf{e}_i\rangle$ donde $\Lambda^i{}_{i'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Obtén las componentes en la nueva base para $T_{[i'j']k'}$, para $T^{i'k'}{}_{k'}$ y para $g_{i'j'}$ ¿Cuál es la signatura de g?

14. Calcula el número de componentes de un tensor de rango $(0, q)$ totalmente simétrico, o antisimétrico. Demuestra que la contracción de un par de índices simétricos, con otro par de índices antisimétricos es idénticamente nula.

15. Demuestra que si $A^{i_1\cdots i_d} = a\,\epsilon^{i_1\ldots i_d}$ en una base $|\mathbf{e}_i\rangle$, en otra base $|\mathbf{e}_{j'}\rangle = \Lambda^i{}_{j'}|\mathbf{e}_i\rangle$, $A^{i'_1\cdots i'_d} = a'\,\epsilon^{i'_1\cdots i'_d}$, con $a' = a\,(\det\Lambda)^{-1}$.

<u>*Nota*</u>: En los ejercicios que siguen a continuación trabajaremos en el espacio euclídeo 3-dimensional, es decir $g_{ij} = \delta_{ij},\ i = 1, 2, 3$.

16. Sea ϵ_{ijk} el tensor totalmente antisimétrico en tres dimensiones. Expresa productos y contracciones tensoriales: $\epsilon_{ijk}\epsilon^{lmn}; \epsilon_{ijk}\epsilon^{lmk}; \epsilon_{ijk}\epsilon^{ljk}$ y $\epsilon_{ijk}\epsilon^{ijk}$ en términos (de combinaciones de productos) del tensor δ_{ij}.

17. Demuestra las siguientes identidades vectoriales (utiliza el ejercicio anterior):

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{c}$$
$$\vec{u}\times(\vec{\nabla}\times\vec{u}) = \frac{1}{2}\vec{\nabla}(|\vec{u}|^2) - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{u}$$
$$\vec{\nabla}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{a}\,(\nabla\vec{b}) - \vec{b}\,(\nabla\vec{a}) - (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{b} + (\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{a}$$

18. Demuestra que el volumen V encerrado en una superficie S puede expresarse mediante la siguiente integral

$$V = \frac{1}{6}\int_S \vec{\nabla}(|\vec{x}|^2)\cdot d\vec{S}$$