Problemas de Física Matemática

Operadores

`Boletín 3`

Marzo de 2011

---

19. El espectro de un operador puede variar dependiendo del dominio de definición $D(\mathbf{T}) \subset \mathcal{H}$. En el espacio vectorial real $C[0,\pi]$, halla los valores propios y vectores propios del operador $\mathbf{T} = \frac{d^2}{dx^2}$, si

a) $D(\mathbf{T}) = \{f(x) \in C[0,\pi] : f'' \in C[0,\pi], f(0) = f(\pi) = 0\}$.

b) $D(\mathbf{T}) = \{f(x) \in C[0,\pi] : f'' \in C[0,\pi], f'(0) = f'(\pi) = 0\}$.

c) $D(\mathbf{T}) = \{f(x) \in C[0,\pi] : f'' \in C[0,\pi], f(0) = f(\pi) = f'(0) = f'(\pi)\}$.

20. Sean T y S las matrices siguientes:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Encuentra, si es posible, una base de vectores propios comunes a ambos operadores lineales.

21. Demuestra que el conmutador de dos operadores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B} \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$, definido a través de la relación $[\mathbf{A},\mathbf{B}] := \mathbf{A}\,\mathbf{B} - \mathbf{B}\,\mathbf{A}$, satisface:

a) $[\mathbf{A},\mathbf{B}] = -[\mathbf{B},\mathbf{A}]$.

b) $[\mathbf{A},(\mathbf{B}+\mathbf{C})] = [\mathbf{A},\mathbf{B}] + [\mathbf{A},\mathbf{C}]$.

c) $[\mathbf{A},\mathbf{B}\,\mathbf{C}] = [\mathbf{A},\,\mathbf{B}]\,\mathbf{C} + \mathbf{B}\,[\mathbf{A},\mathbf{C}]$.

d) $[\mathbf{A},[\mathbf{B},\mathbf{C}]] + [\mathbf{B},[\mathbf{C},\mathbf{A}]] + [\mathbf{C},[\mathbf{A},\mathbf{B}]] = \mathbf{0}$.

e) $[\mathbf{A},\mathbf{B}]^\dagger = [\mathbf{B}^\dagger,\mathbf{A}^\dagger]$.

22. Demuestra que

$$[\mathbf{X}, F(\mathbf{P})] = i\,F'(\mathbf{P})\ , \qquad\qquad [\mathbf{P}, G(\mathbf{X})] = -i\,G'(\mathbf{X})\ .$$

23. Sea $\mathbf{T}$ un operador lineal sobre un espacio vectorial $\mathcal{H}$ de dimensión finita. Demuestra las identidades

$$\det(e^{\mathbf{T}}) = e^{\operatorname{tr}\mathbf{T}} \; , \qquad\qquad \log\det\mathbf{T} = \operatorname{tr}\log\mathbf{T} \; .$$

Supón que $\mathbf{T}(t)$ es una familia de operadores parametrizada por t. Deduce

$$\operatorname{tr}\left(\mathbf{T}^{-1}\frac{d}{dt}\mathbf{T}\right) = \frac{1}{(\det\mathbf{T})}\frac{d}{dt}(\det\mathbf{T}) \; .$$

24. Considera los operadores $\mathbf{X}$ y $\mathbf{P}$ sobre $L^2[-1,+1]$. Encuentra la forma matricial asociada a la acción de los mismos sobre la base ortonormal de Legendre. Investiga la acotación en esta forma.

25. Considera el operador (*Hamiltoniano*) $\mathbf{H}$ definido por la siguiente composición de los operadores hermíticos $\mathbf{X}$ y $\mathbf{P}$ en $\mathcal{A}(\mathcal{H})$:

$$\mathbf{H} := \frac{1}{2}\mathbf{X}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{P}^2 \; .$$

Muestra los siguientes resultados:

a) Si defines el operador $\mathbf{a} := \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{X} + i\,\mathbf{P})$, escribe $\mathbf{X}$ y $\mathbf{P}$ en términos de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{a}^\dagger$.

b) Muestra que $[\mathbf{a},\mathbf{a}^\dagger] = \mathbf{1}$ y $\mathbf{H} = \mathbf{a}^\dagger\,\mathbf{a} + \frac{1}{2}$.

c) Muestra que el operador (*número*) $\mathbf{N} := \mathbf{a}^\dagger\,\mathbf{a}$ satisface:

$$\mathbf{N}^\dagger = \mathbf{N} \; , \qquad [\mathbf{N},\mathbf{a}] = -\mathbf{a} \; , \qquad [\mathbf{N},\mathbf{a}^\dagger] = \mathbf{a}^\dagger \; .$$

d) Demuestra que los valores propios de $\mathbf{N}$ son $\nu \in \mathbb{R}$, $\nu \geq 0$.

e) Demuestra que el vector propio correspondiente a $\nu = 0$, satisface $\mathbf{a}\,|\mathbf{v}_0\rangle = |\mathbf{0}\rangle$. Si $|\mathbf{v}_\nu\rangle$ es un vector propio con autovalor $\nu > 0$, $\mathbf{a}\,|\mathbf{v}_\nu\rangle$ es también autovector de $\mathbf{N}$ con autovalor $\nu - 1$.

f) Muestra que si $|\mathbf{v}_\nu\rangle$ es un vector propio no nulo de $\mathbf{N}$, $\mathbf{a}^\dagger\,|\mathbf{v}_\nu\rangle$ nunca es nulo y es autovector de $\mathbf{N}$ con autovalor $\nu + 1$.

g) Demuestra que los valores propios son $\nu = n \in \mathbb{N}$. Deduce que, por lo tanto, los valores propios de $\mathbf{H}$ son $n + \frac{1}{2}$.

h) Demuestra que

$$\phi_0(x) := \langle\mathbf{x}|\mathbf{v}_0\rangle = c\,e^{-\frac{1}{2}x^2} \; .$$

i) Calcula el resultado de las siguientes expresiones

$$e^{it\mathbf{H}}\,\mathbf{a}\,e^{-it\mathbf{H}} \; , \qquad\qquad e^{it\mathbf{H}}\,\mathbf{a}^\dagger\,e^{-it\mathbf{H}} \; .$$