Problemas de Física Matemática

Geometría diferencial

`Boletín 4`

Abril de 2011

---

26. (Coordenadas estereográficas de la esfera). Considera la esfera S^2 de radio unidad, definida como el conjunto de puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sometidos a la ligadura $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Considera el mapa estereográfico $\varphi : U_\pm = S^2/(0, 0, \mp 1) \to \mathbb{R}^2$.

$$\varphi_+ : \; (x, y, z) \in U_+ \quad \longrightarrow \quad (x_+^1, x_+^2) = \left(\frac{x}{1 + z(x, y)} \; , \; \frac{y}{1 + z(x, y)} \right) \in \mathbb{R}^2$$

$$\varphi_- : \; (x, y, z) \in U_- \quad \longrightarrow \quad (x_-^1, x_-^2) = \left(\frac{x}{1 - z(x, y)} \; , \; \frac{y}{1 - z(x, y)} \right) \in \mathbb{R}^2$$

Halla las funciones de transición $x_\pm^i = x_\pm^i(x_\mp)$. Dibuja las curvas coordenadas x_+^1 y x_+^2 y halla las componentes de una base coordenada tangente en la otra y viceversa.

27. (Coordenadas estándar de la esfera). Repite el ejercicio anterior utilizando el mapa coordenado denominado estándar.

$$\varphi : (x, y, z) \in U \longrightarrow (w^1, w^2) = (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Caracteriza el abierto U en el que este mapa coordenado está bien definido. Define el atlas completo $\varphi_a : U_a \subset S^2 \to \mathbb{R}^2$

28. Sea el campo vectorial $V_{(ab)} = a\, x^1 \partial_{x^2} - b\, x^2 \partial_{x^1}$ onde $a, b \in \mathbb{R}$. Encuentra la expresión para la curva integral, $(x^1(t), x^2(t))$, de dicho campo, que pasa por el punto (x_0^1, x_0^2). Calcula la derivada de Lie $\mathcal{L}_{V_{(cd)}} V_{(ab)}$.

29. Sea el campo vectorial $V = A^i\, x^i \partial_{x^i}, \; i = 1, ..., p$ sobre $\mathbb{R}^p$. Halla la expresión para la curva integral $x^i(t)$ a dicho campo que pasa por el punto $\{x_0^i\}$.

30. Demuestra que la expresión para el flujo de un campo vectorial

$$x^i(t) = e^{t\mathbf{V}} x^i \Big|_{x = x_0}$$

satisface la ecuación de las curvas integrales de $\mathbf{V}$.

31. Demuestra la regla de Leibnitz para la derivada de Lie del producto de una función por un vector. Obtén la derivada de Lie de un campo tensorial de rango arbitrario.

32. Prueba que, $\forall\, f \in \mathcal{F}(M)$, se cumple $\mathcal{L}_{\mathbf{V}}(df) = d(\mathcal{L}_{\mathbf{V}}(f))$.

33. Considera los campos vectoriales $L_i = \epsilon_{ijk}\, x^j\, \partial_k$ en el espacio euclídeo tridimensional. Verifica que cierran una subálgebra de Lie. Escribe estos campos vectoriales en coordenadas esféricas. Calcula de nuevo los corchetes de Lie en esta nueva base.