

PROBLEMAS DE FÍSICA MATEMÁTICA

Teoría de grupos, I

Boletín 5

Mayo de 2011

- 34.** Sea G un grupo y considera el centralizador asociado a un elemento $g \in G$. Demuestra que dicho centralizador es un subgrupo de G .
- 35.** Considera el conjunto de las matrices complejas de dimensión $n \times n$ no singulares, $GL(n)$, no singulares con determinante 1, $SL(n)$, unitarias, $U(n)$, y unitarias con determinante 1, $SU(n)$. Demuestra que $GL(n)$ es un grupo y que $SL(n)$, $U(n)$ y $SU(n)$ son subgrupos de $GL(n)$.
- 36.** Construye la tabla de multiplicación del grupo diédrico, D_3 , o grupo de simetrías del triángulo equilátero.
- 37.** Haciendo uso de la notación de ciclos, construye la tabla de multiplicación del grupo simétrico, S_3 . Compara la tabla con la del grupo D_3 y estudia si se trata de dos grupos isomorfos.
- 38.** Demuestra que las clases de conjugación del grupo simétrico, S_n , están formadas por los elementos de S_n que en la notación de ciclos tienen la misma estructura.
- 39.** Considera el grupo formado por tres elementos, A , B y C , que satisfacen las relaciones
- $$ABC = 1, \quad A^p = B^q = C^r = 1, \quad p, q, r \in \mathbb{Z}^+.$$
- Demuestra que para $p = 3$, $q = r = 2$ se tiene un grupo isomorfo a D_3 .
- 40.** Demuestra que si $G = H_1 \otimes H_2$, entonces $G/H_1 \simeq H_2$ y $G/H_2 \simeq H_1$, donde \simeq significa isomorfo.
- 41.** Determina todos los subgrupos del grupo diédrico, D_3 . Estudia cuáles son subgrupos invariantes y para cada uno de ellos construye el espacio de cosets.
- 42.** Construye una representación bidimensional de D_3 estudiando su acción sobre el espacio euclídeo bidimensional, \mathbb{R}^2 . Estudia si se trata de una representación irreducible.

43. Realiza la descomposición de la representación natural de dimensión tres de S_3 en términos de sus representaciones irreducibles.
44. Construye todas las representaciones irreducibles del grupo cíclico \mathbb{Z}_N .
45. Considera la representación irreducible de dimensión 2, $D(g)$, de D_3 . Calcula el producto de Kronecker, $D(g) \times D(g)$, y realiza la descomposición de la representación resultante en términos de representaciones irreducibles del grupo. Calcula los correspondientes coeficientes de Clebsch-Gordan.
46. Construye la representación irreducible de dimensión 2 del grupo simétrico S_3 y demuestra que es equivalente a la obtenida a partir del grupo diédrico.
47. Calcula las clases de conjugación y la tabla de caracteres del grupo D_4 (grupo de simetrías del cuadrado). Toma la representación de mayor dimensión, realiza el producto de Kronecker por ella misma y realiza su descomposición en términos de representaciones irreducibles del grupo.
48. Estudia el grupo de simetrías de las moléculas H_2O , NH_3 y XeOF_4 . Encuentra sus clases de conjugación, representaciones irreducibles y tablas de caracteres.