Problemas de Física Matemática

*Teoría de grupos, II*

`Boletín 6`

*Mayo de 2011*

---

**49.** Escribe las transformaciones de Galileo en forma de una matriz $\mathcal{G}(\vec{V})$ actuando sobre un vector de cuatro componentes $(t, x^1, x^2, x^3)$. Sea $\mathcal{R}(\vec{\omega})$ la matriz que induce sobre este vector una rotación de los ejes espaciales. Demuestra que el conjunto de todas las transformaciones lineales definidas por las matrices $G(\vec{V}, \vec{w}) = \mathcal{G}(\vec{V})\mathcal{R}(\vec{\omega})$ forman un grupo de seis parámetros que llamamos el grupo de Galileo.

**50.** Dada una matriz no singular $J$, demuestra que el subconjunto de matrices, $M \in SL(N)$, que verifican la ecuación $M^\dagger J M = J$, forman un subgrupo de $SL(N)$. Estudiar su dimensión dependiendo de que $J$ sea una matriz $a$) arbitraria, $b$) hermítica, $c$) anti-hermítica.

**51.** Define los siguientes conjuntos cociente:

$$GL(n,\mathbb{R})/SL(n,\mathbb{R}) \ , \qquad GL(n,\mathbb{R})/GL^+(n,\mathbb{R}) \ , \qquad GL(n,\mathbb{C})/SL(n,\mathbb{C}) \ ,$$

donde $GL^+(m,\mathbb{R})$ es el subgrupo de matrices de $GL(n,\mathbb{R})$ con determinante positivo. Determina cuáles de ellos constituyen un grupo y de qué grupo se trata.

**52.** Sea la base de matrices antisimétrias $L_i$, $i = 1, 2, 3$, cuyos elementos de matriz son $(L_i)_{jk} = \epsilon_{ijk}$, demuestra que satisfacen las reglas de conmutación de $so(3)$,

$$[L_i, L_j] = -\epsilon_{ij}{}^{k} L_k \ .$$

**53.** Dadas las matrices de Pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Demuestra la identidad

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} 1 + i\epsilon^{ijk}\sigma_k \ .$$

(ii) Calcula las trazas de $\sigma^i$, $\sigma^i\sigma^j$, $\sigma^i\sigma^j\sigma^k$, $\sigma^i\sigma^j\sigma^k\sigma^l$.

**54.** Considera la descomposición general del producto de Kronecker de representaciones de $SU(2)$, $D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)}$ en representaciones irreducibles $D^{(J_{\max})} \oplus D^{(J-1)} \oplus .... \oplus D^{(J_{\min})}$, donde $J_{\max} = j_1 + j_2$ y $J_{\min} = |j_1 - j_2|$.

(i) Verifica que $\hat{J}^2$ y $\hat{J}_3$ conmutan $[\hat{J}^2, \hat{J}_3] = 0$.

(ii) Obtén explícitamente la forma de los vectores $|\mathbf{e}_J^{(J)}\rangle$ y $|\mathbf{e}_{J-1}^{(J)}\rangle$ con $J = J_{\max} = j_1 + j_2$. Construye $|\mathbf{e}_{J-1}^{(J-1)}\rangle$ imponiendo ortonormalidad con $|\mathbf{e}_{J-1}^{(J)}\rangle$. Verifica que $\hat{J}_+$ aniquila este vector. Verifica que todos ellos son autoestados de $\hat{J}^2$ con el autovalor correcto.

(iii) Obtén recursivamente los coeficientes de Clebsh-Gordan para el producto tensorial de dos representaciones $D^{(1/2)} \otimes D^{(1/2)}$ y $D^{(1)} \otimes D^{(1/2)}$.

**55.** Una matriz general de $SU(2)$ (en la representación fundamental) puede parametrizarse mediante dos números complejos $\alpha$ y $\beta$ tales que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ en la forma siguiente

$$D^{(1/2)}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} .$$

(i) Calcula el producto de Kroenecker $D^{(1/2)}(\alpha, \beta) \otimes D^{(1/2)}(\alpha, \beta)$.

(ii) Expresa el resultado en la base $\{|\mathbf{e}_{11}\rangle,\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathbf{e}_{12}\rangle + |\mathbf{e}_{21}\rangle),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathbf{e}_{12}\rangle - |\mathbf{e}_{21}\rangle),\ |\mathbf{e}_{22}\rangle\}$. Verifica que, en efecto, el espacio de representación $V = [\frac{1}{2}] \otimes [\frac{1}{2}]$ se decompone en una suma directa $V = [0] \oplus [1]$.