Espacios Lineales

José D. Edelstein

Universidade de Santiago de Compostela

FÍSICA MATEMÁTICA

Santiago de Compostela, febrero de 2011

Espacios vectoriales. Espacios normados. Espacios de Hilbert.

Espacio vectorial o lineal

Un espacio vectorial sobre un cuerpo $\Omega := \{a, b, \ldots\}$, es la terna formada por

- un conjunto no vacío, $V := \{|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle, \ldots\}$,
- una aplicación suma, $+ : V \times V \to V$ y
- y una aplicación producto externo, $\cdot : \Omega \times V \to V$,

que satisfacen las siguientes propiedades:

- asociatividad: $|\mathbf{x}\rangle + (|\mathbf{y}\rangle + |\mathbf{z}\rangle) = (|\mathbf{x}\rangle + |\mathbf{y}\rangle) + |\mathbf{z}\rangle$,
- conmutatividad: $|\mathbf{x}\rangle + |\mathbf{y}\rangle = |\mathbf{y}\rangle + |\mathbf{x}\rangle$,
- elemento neutro: $|\mathbf{x}\rangle + |\mathbf{0}\rangle = |\mathbf{0}\rangle + |\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{x}\rangle$,
- elemento opuesto: $|\mathbf{x}\rangle + |-\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{0}\rangle$,
- composición: $a \cdot (b \cdot |\mathbf{x}\rangle) = (a\, b) \cdot |\mathbf{x}\rangle$,
- distributividad en V: $a \cdot (|\mathbf{x}\rangle + |\mathbf{y}\rangle) = a \cdot |\mathbf{x}\rangle + a \cdot |\mathbf{y}\rangle$,
- distributividad en Ω: $(a + b) \cdot |\mathbf{x}\rangle = a \cdot |\mathbf{x}\rangle + b \cdot |\mathbf{x}\rangle$,
- elemento neutro: $1 \cdot |\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{x}\rangle$.

Independencia y dimensión lineales

A los elementos $\{|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle, \ldots\}$ de V se les llama vectores, mientras que a los $\{a, b, \ldots\} \in \Omega$ se les denomina escalares.

Si $\Omega \equiv \mathbb{R}$, diremos que V es un espacio vectorial real, mientras que si $\Omega \equiv \mathbb{C}$, hablaremos de un espacio vectorial complejo.

Un subconjunto de n vectores, $X_n := \{|\mathbf{x}_1\rangle, \ldots, |\mathbf{x}_n\rangle\} \subset V$, se dice linealmente independiente, si

$$a_1 \cdot |\mathbf{x}_1\rangle + \ldots + a_n \cdot |\mathbf{x}_n\rangle = |\mathbf{0}\rangle \qquad \Rightarrow \qquad a_1 = \ldots = a_n = 0 \; .$$

Si no, decimos que X_n es un conjunto de vectores linealmente dependientes.

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo Ω. Si V contiene un conjunto de d vectores linealmente independientes, y cualquier otro de $d+1$ vectores es linealmente dependiente, decimos que

$$\dim_\Omega V = d \; .$$

la dimensión lineal de V es d.

Base lineal

Se denomina cardinalidad de un conjunto al número de elementos del mismo.

Si no hay límite para el cardinal de un conjunto linealmente independiente, decimos que V tiene dimensión lineal infinita.

Decimos que un subconjunto $B_d \subset V$, forma una base lineal o de Hamel de V, cuando es linealmente independiente y maximal (*i.e.*, no está contenido en ningún otro subconjunto linealmente independiente de V).

La dimensionalidad depende del cuerpo Ω sobre el que esté construido el espacio vectorial V.

Por ejemplo, si $d < \infty$ podemos mostrar que $\dim_{\mathbb{R}} V = 2 \dim_{\mathbb{C}} V$.

En efecto, si $B_d = \{|\mathbf{x}_1\rangle, \ldots, |\mathbf{x}_d\rangle\}$ constituye una base del espacio vectorial complejo V, entonces, $B'_{2d} = \{|\mathbf{x}_1\rangle, \mathrm{i}\,|\mathbf{x}_1\rangle, \ldots, |\mathbf{x}_d\rangle, \mathrm{i}\,|\mathbf{x}_d\rangle\}$ forma una base del mismo espacio vectorial, entendido como espacio vectorial real:

$|\mathbf{x}_k\rangle$, $\mathrm{i}\,|\mathbf{x}_k\rangle$, $k = 1, \ldots, d$, son vectores linealmente independientes en un espacio vectorial real, pero no lo son en un espacio vectorial complejo.

Dimensión infinita y cardinalidad

En el caso de dimensión infinita, podemos afinar un poco más, y comparar V con algunos conjuntos conocidos de cardinalidad infinita, como los naturales $\mathbb{N}$, cuya cardinalidad coincide con la de los racionales $\mathbb{Q}$, o los reales $\mathbb{R}$, cuya cardinalidad coincide con la de los complejos $\mathbb{C}$.

La cardinalidad de $\mathbb{N}$ se denomina $\aleph_0$ (Georg Cantor, 1874).

Un conjunto es numerable cuando su cardinalidad coincide con la de $\mathbb{N}$; *i.e.*, es posible establecer una aplicación uno a uno entre ambos conjuntos.

E.g., $\forall\, q \in \mathbb{Q}$, $q = r/s$, siendo $r, s \in \mathbb{N}$ primos relativos, podemos definir

$$i_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,, \qquad i_{\mathbb{Q}}(q) = (r, s) \,, \quad \mathrm{MCD}(r, s) = 1 \,.$$

Como $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, $\mathrm{card}(\mathbb{N}) \leq \mathrm{card}(\mathbb{Q}) \leq \mathrm{card}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \mathrm{card}(\mathbb{N})$; por lo tanto, $\mathrm{card}(\mathbb{Q}) = \mathrm{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$.

Sin embargo $\mathbb{R}$ no es numerable y decimos que su potencia es superior a la de $\mathbb{Q}$. La cardinalidad de $\mathbb{R}$ se denota $\aleph_1$.

Ejemplos

- La recta real, $x \in \mathbb{R}$, con la operación usual de adición $x + y = z$, y multiplicación por números reales $a\, x = y$, es un espacio vectorial, $x \to |\mathbf{x}\rangle$. El espacio vectorial y el cuerpo coinciden, $V = \Omega = \mathbb{R}$.
- El espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, dado por el conjunto de los triples ordenados de números reales, $|\mathbf{x}\rangle = (x_1, x_2, x_3)$. La generalización de este caso a un cuerpo y dimensión arbitrarios se denomina producto cartesiano, Ω^n. Una base está dada por $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.
- $\Omega^{\mathbb{N}}$, consta de $\infty-$tuplas, $|\mathbf{a}\rangle = (a_1, a_2, \ldots)$, con $a_i \in \Omega$. Tiene dimensión infinita, $|\mathbf{a}\rangle + |\mathbf{b}\rangle = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots)$ y $\lambda \cdot |\mathbf{a}\rangle = (\lambda\, a_1, \lambda\, a_2, \ldots)$.
- $\mathrm{M}_{\mathbb{N}}^{\Omega}$, consta de matrices infinitas, $|\mathbf{M}\rangle = \{M^i{}_j \in \Omega,\ i,j \in \mathbb{N}\}$.
- $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ funciones continuas de variable real n veces derivables. $f(x) \to |\mathbf{f}\rangle$ con $x \in \mathbb{R}$ y $f^{(n)} < \infty$. La suma se define punto por punto

$$|\mathbf{f}\rangle + |\mathbf{g}\rangle = |\mathbf{h}\rangle \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) + g(x) = h(x)\ , \quad \forall x \in \mathbb{R}\ .$$

  Claro está, podemos remplazar $\mathbb{R}$ por Ω.

Subespacios vectoriales

Un subespacio de un espacio vectorial, es un subconjunto $W \subset V$, que a su vez es un espacio vectorial.

Llamamos propio a un subespacio de dimensión estrictamente menor que la del espacio en el que está contenido.

Dado un subconjunto $X_p \subset V$, llamamos variedad o envolvente lineal, $\mathrm{lin}(X_p)$, al mínimo subespacio vectorial que contiene a X_p.

Una consecuencia inmediata es que (eliminamos la notación $\lambda \cdot |\mathbf{x}\rangle$ por $\lambda\,|\mathbf{x}\rangle$)

$$\mathrm{lin}(X_p) = \{|\mathbf{x}\rangle \in V \;/\; |\mathbf{x}\rangle = a_1\,|\mathbf{x}_1\rangle + \ldots + a_p\,|\mathbf{x}_p\rangle\}\ .$$

El adjetivo *lineal* lleva implícita la idea de que se trata de sumas de un número finito de términos, independientemente de que el conjunto X_p sea finito o no.

E.g. Sea $X = \{1, t, t^2, \ldots, t^n, \ldots\} \in \mathcal{C}^\infty([0,1])$, $\mathrm{lin}(X)$, es el espacio vectorial de polinomios en la variable t.

La función e^t, por ejemplo, no pertenece a $\mathrm{lin}(X)$.

Suma directa de espacios vectoriales

Proposición: Si B es una base de V, entonces $V = \mathrm{lin}(B)$. Dicho de otra manera, la descomposición

$$|\mathbf{x}\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \, |\mathbf{x}_i\rangle \qquad \forall |\mathbf{x}\rangle \in V \ ,$$

existe y es única.

Demostración: Sea B una base de V. Supongamos que existe un elemento $|\mathbf{x}\rangle \in V$ tal que $|\mathbf{x}\rangle \notin \mathrm{lin}(B)$. Entonces podríamos ampliar B a $B' = \{B, |\mathbf{x}\rangle\}$, que sería linealmente independiente y mayor que B, pero B es maximal.

La unicidad se deja como un ejercicio trivial.

Decimos que un espacio V es la suma lineal de dos subespacios V_1 y V_2, $V = V_1 \oplus V_2$, cuando todo elemento $|\mathbf{x}\rangle \in V$ puede ser escrito en forma única como $|\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{x}_1\rangle + |\mathbf{x}_2\rangle$ donde $|\mathbf{x}_1\rangle \in V_1$ y $|\mathbf{x}_2\rangle \in V_2$.

Esta definición se generaliza trivialmente a la suma directa de varios espacios o subespacios vectoriales, $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$.

Espacio métrico

Un espacio métrico es un par (X, d), dado por un conjunto de elementos, X, y una noción de distancia entre ellos;

es decir, una función, d, definida sobre pares ordenados, $|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle \in X$, tal que se verifican las propiedades siguientes:

- simetría: $$d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) = d(|\mathbf{y}\rangle, |\mathbf{x}\rangle),$$
- auto-distancia nula: $$d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{x}\rangle) = 0,$$
- positividad: $$d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) > 0 \ \text{ si } |\mathbf{x}\rangle \neq |\mathbf{y}\rangle,$$
- desigualdad triangular: $$d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) \leq d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{z}\rangle) + d(|\mathbf{z}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) \quad \forall\, |\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle, |\mathbf{z}\rangle \in X.$$

Espacio normado

Un espacio vectorial V sobre Ω, se dice que es normado cuando existe una aplicación (norma),

$$\| \; \| : |\mathbf{x}\rangle \in V \to \| |\mathbf{x}\rangle \| \in \mathbb{R} \,, \qquad \text{tal que} \quad \forall |\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle \in V \ y \ \forall a \in \Omega \,,$$

se verifican las siguientes propiedades:

- positividad: $\| |\mathbf{x}\rangle \| \geq 0$,
- unicidad de la norma del cero: $\| |\mathbf{x}\rangle \| = 0 \iff |\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{0}\rangle$,
- homogeneidad: $\| a \, |\mathbf{x}\rangle \| = |a| \, \| |\mathbf{x}\rangle \|$,
- desigualdad triangular o de Minkowski: $\| |\mathbf{x}\rangle + |\mathbf{y}\rangle \| \leq \| |\mathbf{x}\rangle \| + \| |\mathbf{y}\rangle \|$.

Cuando queramos hacer referencia explícita a la norma, escribiremos para un espacio normado, $(V, \| \cdot \|)$. Todo espacio normado es un espacio métrico, en el que la distancia viene definida por la norma:

$$d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) = \| |\mathbf{x}\rangle - |\mathbf{y}\rangle \| \,.$$

Es importante destacar la diferencia entre norma y distancia. La definición de norma requiere un V, mientras que se puede definir una distancia sobre un conjunto arbitrario.

Aún en el contexto de espacios vectoriales, una norma define una distancia pero lo contrario no es cierto en general.

Ejemplos:

- $\Omega^n(\mathbb{R}^n$ ó $\mathbb{C}^n)$ es un espacio lineal normado con la norma euclídea $\|\cdot\|_p$,

$$\||\mathbf{x}\rangle\|_p = \|(a_1, \ldots, a_n)\|_p := \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\right)^{1/p} .$$

- El espacio M_m^Ω de matrices $m \times m$ cuyos elementos toman valores en Ω, puede dotarse de una norma,

$$\||\mathbf{M}\rangle\|_p := \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} |M^i{}_j|^p\right)^{1/p} .$$

- Sobre $\Omega^{\mathbb{N}}$ construimos los siguientes subespacios lineales normados

$$\Lambda_{\Omega}^{p} := \{|\mathbf{x}\rangle = (a_1, a_2, \ldots) \in \Omega^{\mathbb{N}} \ / \ \||\mathbf{x}\rangle\|_p := \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p\right)^{1/p} < \infty\} \ ,$$

$$\Lambda_{\Omega}^{\infty} := \{|\mathbf{x}\rangle = (a_1, a_2, \ldots) \in \Omega^{\mathbb{N}} \ / \ \||\mathbf{x}\rangle\|_\infty := \sup_n |a_n| < \infty\} \ .$$

  con $1 \leq p < \infty$.

- Sobre un subespacio del espacio vectorial de las matrices infinitas, $\mathrm{M}_{\mathbb{N}}^{\Omega}$, podemos definir

$$\mathcal{M}_{\Omega}^{p} := \{|\mathbf{M}\rangle \in \mathrm{M}_{\mathbb{N}}^{\Omega} \ / \ \||\mathbf{M}\rangle\|_p = \left(\sum_{i,j=1}^{\infty} |M^i{}_j|^p\right)^{1/p} < \infty\} \ .$$

- Sea K un conjunto compacto de Ω^n; el espacio vectorial, $(\mathcal{C}(K), \| \ \|_\infty)$, de las funciones continuas, $f : K \to \Omega$, puede investirse de la norma

$$\||\mathbf{f}\rangle\|_\infty \equiv \sup_K |f(x)| \ .$$

Convergencia: vecindad y punto de adherencia

- $\mathcal{C}(K)$ admite otras estructuras normadas, como por ejemplo $(C(K), \|\cdot\|_p)$,

$$\||\mathbf{f}\rangle\|_p \equiv \left| \int_K |f(x)|^p dx \right|^{1/p} .$$

- Si relajamos el requisito de continuidad en el ejemplo anterior, llegamos al espacio vectorial normado, $L^p(K)$, de funciones f que verifican

$$\|f\|_p \equiv \left| \int_K |f|^p dx \right|^{1/p} < \infty .$$

La introducción de una norma permite definir una noción de convergencia.

Una bola abierta de radio ϵ, $B(|\mathbf{x}_0\rangle, \epsilon)$, es el conjunto de los $|\mathbf{x}\rangle \in V$, tal que $\||\mathbf{x}\rangle - |\mathbf{x}_0\rangle\| < \epsilon$. Se llama también $\epsilon-$vecindad de $|\mathbf{x}_0\rangle$, y se denota $O_\epsilon(|\mathbf{x}_0\rangle)$.

$|\mathbf{x}\rangle \in V$ se denomina punto de adherencia de $M \subset V$, si $\forall\, \epsilon > 0, \exists\, |\mathbf{z}\rangle \in M$ tal que $|\mathbf{z}\rangle \in O_\epsilon(|\mathbf{x}\rangle)$ (cualquier vecindad suya contiene al menos un punto de M).

Cerrados, densos y separables

Si $|\mathbf{x}\rangle \in M$, trivialmente es un punto de adherencia. Pero además existen puntos de adherencia en V que no pertenecen a M.

Por ejemplo, sea $V = \mathbb{R}$ y $M = [0, 1)$; el punto 1 es de adherencia.

El conjunto formado por la unión de M con todos sus puntos de adherencia se denomina clausura de M y se denota con $\overline{M}$.

- Decimos que $M \subset V$ es cerrado, si coincide con su clausura, $\overline{M} = M$.
- Sean $M, N \subset V$. Decimos que M es denso en N cuando $N \subset \overline{M}$.
- $M \subset V$ se dice que es siempre denso en V, cuando $\overline{M} = V$.
- Un espacio normado $(V, \|\cdot\|)$ se dice que es separable, cuando existe un subconjunto numerable, siempre denso en V.

El ejemplo clásico de subconjunto siempre denso en $\mathbb{R}$ es $\mathbb{Q}$. Dado que $\mathbb{Q}$ es, además, un conjunto numerable, $\mathbb{R}$ es un espacio normado separable.

Sucesión convergente y series en espacios normados

Se dice que una sucesión $\{|\mathbf{x}_n\rangle\}_1^\infty \subset V$ converge (fuertemente) a $|\mathbf{x}_0\rangle \in V$, simbólicamente $|\mathbf{x}_n\rangle \to |\mathbf{x}_0\rangle$, si

$$\lim_{n\to\infty} \| |\mathbf{x}_n\rangle - |\mathbf{x}_0\rangle \| \to 0 \ .$$

Decimos que $|\mathbf{x}_0\rangle$ es el límite de la sucesión.

Lema: Dado un subconjunto $M \subset V$ y un vector $|\mathbf{x}\rangle \in V$, $|\mathbf{x}\rangle$ es un punto de adherencia de M, si y sólo si $\exists \{|\mathbf{x}_n\rangle\}_1^\infty \subset M$, tal que $|\mathbf{x}_n\rangle \to |\mathbf{x}\rangle$.

Sean $|\mathbf{v}_i\rangle \in (V, \|\cdot\|)$. Se dice que la serie $\sum_{i=1}^\infty |\mathbf{v}_i\rangle$ converge hacia $|\mathbf{v}\rangle \in V$, si la sucesión de sumas parciales

$$|\mathbf{s}_n\rangle = \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{v}_i\rangle$$

converge a $|\mathbf{v}\rangle$.

La operación $\sum_{i=1}^\infty$ para $|\mathbf{v}_i\rangle$ es posible porque en V hay una norma definida ($\Rightarrow$ se puede definir en términos de la distancia a cualquier elemento de V).

Sucesión de Cauchy

$\{|\mathbf{y}_n\rangle\}_1^\infty \subset V$ es una sucesión de Cauchy (o fundamental), si

$$\lim_{n,m\to\infty} \| |\mathbf{y}_n\rangle - |\mathbf{y}_m\rangle \| \to 0 \; ,$$

es decir, si $\forall \epsilon > 0, \; \exists\, N > 0$ tal que $\| |\mathbf{y}_n\rangle - |\mathbf{y}_m\rangle \| < \epsilon, \; \forall n, m > N$.

Proposición: Toda sucesión convergente en $(V, \| \cdot \|)$ es de Cauchy.

Demostración: Se deduce de la desigualdad triangular,

$$\| |\mathbf{x}_n\rangle - |\mathbf{x}_m\rangle \| \leq \| |\mathbf{x}_n\rangle - |\mathbf{x}_0\rangle \| + \| |\mathbf{x}_0\rangle - |\mathbf{x}_m\rangle \| \to 0 \; .$$

Sin embargo, no toda sucesión de Cauchy es convergente. Por ejemplo, $\{|\mathbf{y}_n\rangle\}_1^\infty := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \subset \mathbb{Q}$ es de Cauchy, pero

$$\lim_{n\to\infty} |\mathbf{y}_n\rangle = e \notin \mathbb{Q} \; .$$

Resulta útil identificar aquellos espacios en los que se pueda asegurar la convergencia de sucesiones de Cauchy.

Espacio completo

Un espacio normado, $(V, \|\cdot\|)$, se dice que es completo en la norma asociada o de Banach, cuando toda sucesión de Cauchy es también convergente en V.

La relación entre *completo* y *cerrado* puede llevar a confusión.

Un subconjunto no vacío, $M \subset (V, \|\cdot\|)$, es completo, si toda sucesión de Cauchy $\{|\mathbf{x}_n\rangle\}_1^\infty \subset M$ converge en M.

Proposición: Si $(V, \|\cdot\|)$ es completo y $M \subset (V, \|\cdot\|)$ es no vacío, entonces: M completo $\Longleftrightarrow$ M cerrado.

Demostración:

[$\Rightarrow$] Si $\{|\mathbf{x}_n\rangle\} \subset M \subset V$, tal que $|\mathbf{x}_n\rangle \to |\mathbf{y}\rangle \in V$ (es completo), entonces por un lado $\{|\mathbf{x}_n\rangle\}$ es de Cauchy y por otro está en M.

Luego si M es completo la sucesión converge en M, luego M es cerrado.

[$\Leftarrow$] Dado M cerrado, si $\{|\mathbf{x}_n\rangle\} \subset M$ es de Cauchy, debe converger en V (ya que es completo) hacia $|\mathbf{y}\rangle \in \overline{M}$, pero $\overline{M} = M$, luego M es completo.

Ejemplos

- $\mathbb{Q}$ es el ejemplo clásico de conjunto no completo en la norma euclídea, $\|\cdot\|_2$. $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ son completos y separables en la misma norma.
- Sea V un espacio vectorial real (complejo) de dimensión finita. Hay un isomorfismo entre este espacio y $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$), que asocia a cada vector con sus componentes en una determinada base.

  En virtud de la completitud de $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$), cualquier espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) es automáticamente completo y separable.
- Sea $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$. El subconjunto $\mathcal{P}$ de polinomios en $t \in [0,1]$ es, a su vez, un subespacio lineal normado.

  El teorema de Weierstrass asegura que $\forall |\mathbf{f}\rangle \in \mathcal{C}[0,1]$, existe alguna sucesión de polinomios, $\{|\mathbf{P}_n\rangle\}_1^\infty \to |\mathbf{f}\rangle$ en $\|\cdot\|_\infty \quad \Rightarrow$

  $$(\mathcal{P}, \|\cdot\|_\infty) \text{ no es completo y } (\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty) \text{ sí lo es.}$$
- Λ^p_Ω es completo.
- $L^p[a,b]$ es completo.

Compleción

Sea V normado. El espacio normado $\widetilde{V}$ se denomina compleción de V si:

- V es un subespacio de $\widetilde{V}$.
- V es siempre denso en $\widetilde{V}$, es decir $\overline{V} = \widetilde{V}$.

Dos V_1 y V_2 se dice que son isomorfos en norma, si $\exists$ un isomorfismo lineal $T : V_1 \to V_2$ isométrico: $\| |\mathbf{Tx}\rangle \|_{V_2} = \| |\mathbf{x}\rangle \|_{V_1}$, $\forall |\mathbf{x}\rangle \in V_1$.

Teorema: Todo V normado admite una única (salvo isomorfismos en norma) compleción $\widetilde{V}$ en un espacio normado y completo.

Demostración: Se añaden a V clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy sin límite en V. La estructura lineal normada se extiende a $\widetilde{V}$ por continuidad. *Ejemplos:*

- $\mathbb{R}$ es la compleción de $\mathbb{Q}$.
- $(\mathcal{C}[0,1], \| \cdot \|_\infty)$ es la compleción de $(\mathcal{P}[0,1], \| \cdot \|_\infty)$.
- $L^p[a,b]$ es la compleción de $\mathcal{C}[a,b]$ en la norma $\| \cdot \|_p$.

Espacios lineales con producto escalar

La norma permite asociar un número positivo a cada $|\mathbf{x}\rangle \in V$.

Con el producto escalar podemos generalizar conceptos como ángulos, proyecciones o perpendicularidad, propios de la geometría euclídea clásica.

El producto escalar sobre V es una aplicación $(\,,\,) : V \times V \to \Omega$, que cumple:

- positividad: $(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{x}\rangle) \geq 0 \quad \text{y} \quad (|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{x}\rangle) = 0 \;\Leftrightarrow\; |\mathbf{x}\rangle = 0,$
- linealidad: $(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle + |\mathbf{z}\rangle) = (|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) + (|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{z}\rangle),$
- homogeneidad: $(|\mathbf{x}\rangle, a\,|\mathbf{y}\rangle) = a\,(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle),$
- hermiticidad: $(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) = (|\mathbf{y}\rangle, |\mathbf{x}\rangle)^*.$

Espacio con producto escalar es el par $(V, (\,,\,))$. Se dice que $|\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{w}\rangle \in V$ son ortogonales, $|\mathbf{v}\rangle \perp |\mathbf{w}\rangle$, si

$$(|\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{w}\rangle) = 0 \;.$$

Se dice que $S = \{|\mathbf{v}_\alpha\rangle\}_{\alpha\in J} \subset V$ es ortogonal cuando todos sus elementos lo son de a pares. Si además $(|\mathbf{v}_\alpha\rangle, |\mathbf{v}_\alpha\rangle)_{\alpha\in J} = 1$, S se denomina ortonormal.

Norma inducida por un producto escalar

Dos conjuntos de vectores $S_1, S_2 \subset (V, (\,,\,))$ son mútuamente ortogonales, $S_1 \perp S_2$, cuando

$$(|\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle) = 0\ , \quad \forall |\mathbf{v}_1\rangle \in S_1, |\mathbf{v}_2\rangle \in S_2\ .$$

Se sigue inmediatamente de las propiedades de linealidad del producto escalar que $\mathrm{lin}(S_1) \perp \mathrm{lin}(S_2) \;\Leftrightarrow\; S_1 \perp S_2$.

En $(V, (\,,\,))$, la aplicación $|\mathbf{x}\rangle \to \||\mathbf{x}\rangle\| \equiv \sqrt{(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{x}\rangle)}$ define una norma.

Teorema (de Pitágoras generalizado): Si $S = \{|\mathbf{v}_\alpha\rangle\}_{\alpha \in J}$ es un subconjunto ortonormal finito en $(V, (\,,\,))$, entonces $\forall\, |\mathbf{v}\rangle \in V$ se cumple que

$$\||\mathbf{v}\rangle\|^2 = \sum_{\alpha \in J} |(|\mathbf{v}_\alpha\rangle, |\mathbf{v}\rangle)|^2 + \||\mathbf{v}\rangle - \sum_{\alpha \in J} (|\mathbf{v}_\alpha\rangle, |\mathbf{v}\rangle)\, |\mathbf{v}_\alpha\rangle\|^2\ .$$

Demostración: Sea $|\mathbf{d}\rangle = |\mathbf{v}\rangle - \sum_{\alpha \in J} (|\mathbf{v}_\alpha\rangle, |\mathbf{v}\rangle)\, |\mathbf{v}_\alpha\rangle$, es fácil ver $|\mathbf{v} - \mathbf{d}\rangle \perp |\mathbf{d}\rangle$.

Entonces:

$$\||\mathbf{v}\rangle\|^2 = (|\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{v}\rangle) = ((|\mathbf{v} - \mathbf{d}\rangle) + |\mathbf{d}\rangle, (|\mathbf{v} - \mathbf{d}\rangle) + |\mathbf{d}\rangle) = \||\mathbf{v} - \mathbf{d}\rangle\|^2 + \||\mathbf{d}\rangle\|^2\ .$$

Desigualdades

Corolario (Desigualdad finita de Bessel): Si $\{|\mathbf{v}_\alpha\rangle\}_{\alpha\in J}$ es un subconjunto ortonormal finito de $(V,(\,,\,))$, se tiene que

$$\||\mathbf{v}\rangle\|^2 \geq \sum_{\alpha\in J} |(|\mathbf{v}_\alpha\rangle, |\mathbf{v}\rangle)|^2 \,, \qquad \forall\, |\mathbf{v}\rangle \in V \,.$$

Desigualdad de Schwarz: $\forall\, |\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle \in V \;\Rightarrow\; |(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle)| \leq \||\mathbf{x}\rangle\| \, \||\mathbf{y}\rangle\|$. Cuando se satura la desigualdad, $|\mathbf{x}\rangle = \lambda\, |\mathbf{y}\rangle$ para algún $\lambda \in \Omega$.

Demostración: Sean $|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle \neq 0$. Tomando el subconjunto ortonormal finito dado por un elemento $\{|\mathbf{y}\rangle/\||\mathbf{y}\rangle\|\}$, y usando la desigualdad de Bessel,

$$\||\mathbf{x}\rangle\| \geq |(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle/\||\mathbf{y}\rangle\|)| = \frac{1}{\||\mathbf{y}\rangle\|} \, |(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle)| \,.$$

Desigualdad triangular o de Minkowski: Dados $|\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{w}\rangle \in V$,

$$\||\mathbf{v}\rangle + |\mathbf{w}\rangle\|^2 = \||\mathbf{v}\rangle\|^2 + \||\mathbf{w}\rangle\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(|\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{w}\rangle) \leq \||\mathbf{v}\rangle\|^2 + \||\mathbf{w}\rangle\|^2 + 2|(|\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{w}\rangle)|$$

$$\leq \||\mathbf{v}\rangle\|^2 + \||\mathbf{w}\rangle\|^2 + 2\||\mathbf{v}\rangle\| \, \||\mathbf{w}\rangle\| = (\||\mathbf{v}\rangle\| + \||\mathbf{w}\rangle\|)^2 \,.$$

Ejemplos

- Ω^n admite una estructura de espacio con producto escalar:

$$(|\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{w}\rangle) \equiv \sum_{j=1}^{n} a_j^\star \, b_j \;, \qquad |\mathbf{v}\rangle = (a_1, \ldots, a_n) \;,\; |\mathbf{w}\rangle = (b_1, \ldots, b_n) \;.$$

- Λ_Ω^2 admite el producto escalar:

$$(|\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{w}\rangle) \equiv \sum_{\alpha\in\mathbb{N}} a_\alpha^\star \, b_\alpha \;, \qquad |\mathbf{v}\rangle = \{a_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}} \;,\; |\mathbf{w}\rangle = \{b_\beta\}_{\beta\in\mathbb{N}} \;.$$

  Λ_Ω^p es normado pero $\nexists\, (\,,\,)$ que induzca la norma asociada, para $p \neq 2$.

- $\mathcal{C}(K)$, con $K \subset \mathbb{R}$ compacto, admite el producto escalar:

$$(|\mathbf{f}\rangle, |\mathbf{g}\rangle) \equiv \int_K f(x)^\star \, g(x) \, dx \;.$$

- $L^2(\mathbb{R})$ con producto escalar (análogamente para $L^2[a,b]$):

$$(|\mathbf{f}\rangle, |\mathbf{g}\rangle) \equiv \int_{\mathbb{R}} f(x)^\star \, g(x) \, dx \;.$$

Convergencia débil

Definición: Sea $\{|\mathbf{x}_n\rangle\}_1^\infty$ una sucesión en $(V, (\,,\,))$. Decimos que converge débilmente a $|\mathbf{x}\rangle$, $\{|\mathbf{x}_n\rangle\}_1^\infty \rightharpoonup |\mathbf{x}\rangle$ si

$$(|\mathbf{y}\rangle, |\mathbf{x}_n\rangle) \to (|\mathbf{y}\rangle, |\mathbf{x}\rangle) \qquad \forall |\mathbf{y}\rangle \in V \ .$$

Teorema: Convergencia fuerte implica convergencia débil. Es decir:

$$\{|\mathbf{x}_n\rangle\}_1^\infty \to |\mathbf{x}\rangle \qquad \Longrightarrow \qquad \{|\mathbf{x}_n\rangle\}_1^\infty \rightharpoonup x \ .$$

Demostración: Para todo $|\mathbf{y}\rangle \in V$,

$$|(|\mathbf{y}\rangle, |\mathbf{x}_n\rangle) - (|\mathbf{y}\rangle, |\mathbf{x}\rangle)| = |(|\mathbf{y}\rangle, |\mathbf{x}_n\rangle - |\mathbf{x}\rangle)| \leq \||\mathbf{y}\rangle\| \, \||\mathbf{x}_n\rangle - |\mathbf{x}\rangle\| \to 0 \ .$$

La implicación inversa no ocurre necesariamente.

Recordemos que todo espacio normado admite una única extensión a un espacio completo. Un espacio vectorial con producto escalar induce una norma única, y por tanto, también admite una única compleción.

Espacios de Hilbert

Un espacio de Hilbert, $\mathcal{H}$, es un par $(V, (\,,\,))$ completo en la norma asociada.

Ejemplos:

- $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ y M_N^Ω son espacios de Hilbert.
- Λ_Ω^2 y M_∞^Ω son espacios de Hilbert.
- $L^2(\mathbb{R}^n)$ y $L^2[a,b]$ son espacios de Hilbert.

Sea M un subconjunto de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Llamamos complemento ortogonal de M en $\mathcal{H}$, $M^\perp$, a

$$M^\perp \equiv \{|\mathbf{v}\rangle \in \mathcal{H} \;/\; |\mathbf{v}\rangle \perp M\} \qquad\qquad (M^\perp := \mathcal{H} \ominus M)\;.$$

Teorema fundamental de la proyección ortogonal: Si M es un subespacio lineal cerrado de $\mathcal{H}$, entonces $\forall\, |\mathbf{v}\rangle \in \mathcal{H}$,

$$|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{v}_1\rangle + |\mathbf{v}_2\rangle \qquad \text{con} \qquad |\mathbf{v}_1\rangle \in M\;,\;\; |\mathbf{v}_2\rangle \in M^\perp\;,$$

y tal descomposición es única. $|\mathbf{v}_1\rangle$ es la proyección ortogonal de $|\mathbf{v}\rangle$ sobre M.

Bases de un espacio de Hilbert

Sean dos subespacios lineales cerrados $M, N \subset \mathcal{H}$, diremos que $\mathcal{H}$ es suma directa ortogonal de ellos, $\mathcal{H} = M \oplus N$, si $\mathcal{H} = M \vec{\oplus} N$ (suma directa) y $M \perp N$.

El teorema anterior afirma que $\forall\, M \subset \mathcal{H}$ cerrado, $\mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}$.

Sea $S := \{|\mathbf{f}_\alpha\rangle\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$, donde $\mathcal{I}$ es un conjunto finito o infinito de índices. S es base de $\mathcal{H}$ si es maximal, *i.e.*, no es subconjunto propio de ningún conjunto linalmente independiente de $\mathcal{H}$.

En un espacio de Hilbert, podemos formar la matriz de productos escalares de los elementos de una base

$$g_{\alpha\beta} = (|\mathbf{f}_\alpha\rangle, |\mathbf{f}_\beta\rangle) \qquad \alpha, \beta \in \mathcal{I}\ .$$

Un conjunto ortonormal de vectores $S = \{|\mathbf{e}_\alpha\rangle\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$ si es maximal.

La matriz de productos escalares elementales es la delta de Kronecker,

$$(|\mathbf{e}_\alpha\rangle, |\mathbf{e}_\beta\rangle) = \delta_{\alpha\beta}\ .$$

Teorema de Gramm-Schmidt

Teorema de Gramm-Schmidt: Sea $\{|\mathbf{v}_j\rangle\}_{j\in J}\subset\mathcal{H}$ un conjunto linealmente independiente con J finito ($\{1,2,\ldots,n\}$) o infinito numerable ($\mathbb{N}$). Entonces $\exists\,\{|\mathbf{u}_j\rangle\}_{j\in J}$ ortonormal tal que $\mathrm{lin}(\{|\mathbf{v}_j\rangle\}_{j\in J})=\mathrm{lin}(\{|\mathbf{u}_j\rangle\}_{j\in J})$.

Demostración: Por construcción explícita del modo siguiente:

$$|\mathbf{w}_1\rangle := |\mathbf{v}_1\rangle \quad\Rightarrow\quad |\mathbf{u}_1\rangle := \frac{|\mathbf{w}_1\rangle}{\||\mathbf{w}_1\rangle\|} \quad\Rightarrow\quad |\mathbf{w}_2\rangle := |\mathbf{v}_2\rangle - (|\mathbf{u}_1\rangle,|\mathbf{v}_2\rangle)\,|\mathbf{u}_1\rangle$$

$$\Rightarrow\quad |\mathbf{u}_2\rangle := \frac{|\mathbf{w}_2\rangle}{\||\mathbf{w}_2\rangle\|} \quad\Rightarrow\quad \cdots \quad\Rightarrow\quad |\mathbf{w}_m\rangle := |\mathbf{v}_m\rangle - \sum_{k=1}^{m-1}(|\mathbf{u}_k\rangle,|\mathbf{v}_m\rangle)\,|\mathbf{u}_k\rangle$$

$$\Rightarrow\quad |\mathbf{u}_m\rangle \equiv \frac{|\mathbf{w}_m\rangle}{\||\mathbf{w}_m\rangle\|} \quad\Rightarrow\quad \cdots$$

El nuevo conjunto es ortogonal por construcción.

$|\mathbf{w}_m\rangle$ no se anula en virtud de la supuesta independencia lineal de $\{|\mathbf{v}_j\rangle\}_{j\in J}$. Es evidente que las variedades lineales generadas son las mismas.

Componentes covariantes y criterio de convergencia

Dada una base ortonormal, $S = \{|\mathbf{e}_\alpha\rangle\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$, de $\mathcal{H}$, todo $|\mathbf{v}\rangle \in \mathcal{H}$ puede expresarse como combinación lineal finita o infinita

$$|\mathbf{v}\rangle = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} v_\alpha |\mathbf{e}_\alpha\rangle \ .$$

Los coeficientes v_α pueden recuperarse calculando la proyección del vector sobre el elemento de la base deseado,

$$v_\alpha = (|\mathbf{e}_\alpha\rangle, |\mathbf{v}\rangle) \ ,$$

y reciben el nombre de componentes covariantes de $|\mathbf{v}\rangle$ en la base S.

Lema: Sea $\{|\mathbf{e}_j\rangle\}_{j=1}^{\infty}$ un conjunto ortonormal de $\mathcal{H}$. Entonces:

$$\sum_{j=1}^{\infty} v_j \, |\mathbf{e}_j\rangle \text{ converge en } \mathcal{H} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{j=1}^{\infty} |v_j|^2 \text{ converge en } \mathbb{R} \ .$$

Teorema de existencia de bases ortonormales: Todo espacio de Hilbert $\mathcal{H} \neq \{\emptyset\}$ posee alguna base ortonormal.

Caracterización de bases ortonormales

Teorema de caracterización de bases ortonormales: Sea $S = \{|\mathbf{e}_\alpha\rangle\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$ un conjunto ortonormal numerable de $\mathcal{H}$ y $v_\alpha := (|\mathbf{e}_\alpha\rangle, |\mathbf{v}\rangle)$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

- S es base ortonormal de $\mathcal{H}$.
- $\overline{\mathrm{lin}\, S} = \mathcal{H}$.
- Si $|\mathbf{v}\rangle \perp |\mathbf{e}_\alpha\rangle,\ \forall\, \alpha \in \mathcal{I} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{0}\rangle$. Es decir, $S^\perp = \{|\mathbf{0}\rangle\}$.
- (Desarrollo de Fourier) $\forall\, |\mathbf{v}\rangle \in \mathcal{H} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{v}\rangle = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} v_\alpha\, |\mathbf{e}_\alpha\rangle$.
- (Identidad de Parseval) $\forall\, |\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{w}\rangle \in \mathcal{H} \quad \Rightarrow \quad (|\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{w}\rangle) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} v_\alpha^\star\, w_\alpha$.
- (Identidad de Parseval) $\forall\, |\mathbf{v}\rangle \in \mathcal{H} \quad \Rightarrow \quad \|\, |\mathbf{v}\rangle\|^2 = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} |v_\alpha|^2$.

Demostración del teorema de caracterización de bases ortonormales

Sea $S = \{|\mathbf{e}_\alpha\rangle\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$ conjunto ortonormal numerable de $\mathcal{H}$ y $v_\alpha := (|\mathbf{e}_\alpha\rangle, |\mathbf{v}\rangle)$.

[1] Si S es base ortonormal de $\mathcal{H}$, entonces $\overline{\text{lin}\, S} = \mathcal{H}$.

Teorema de la proyección ortogonal: un subespacio lineal S es denso en $\mathcal{H}$ si y sólo si $S^\perp = \{\emptyset\}$. Si $\overline{\text{lin}\, S} \neq \mathcal{H}$, $\exists\, |\mathbf{w}\rangle \in S^\perp$ (tal que $|||\mathbf{w}\rangle|| = 1$). Entonces, podemos añadir $|\mathbf{w}\rangle$ a S, pero S es maximal.

[2] Si $\overline{\text{lin}\, S} = \mathcal{H}$, entonces si $|\mathbf{v}\rangle \perp |\mathbf{e}_\alpha\rangle\,,\ \forall\, \alpha \in \mathcal{I} \ \Rightarrow\ |\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{0}\rangle$; *i.e.*, $S^\perp = \{|\mathbf{0}\rangle\}$.

[3] Si $S^\perp = \{|\mathbf{0}\rangle\}$, entonces $\forall\, |\mathbf{v}\rangle \in \mathcal{H} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{v}\rangle = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} v_\alpha\, |\mathbf{e}_\alpha\rangle$.

Si $\mathcal{I}$ es finito, $|\mathbf{v}'\rangle = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} v_\alpha\, |\mathbf{e}_\alpha\rangle$ es tal que $(|\mathbf{v}\rangle - |\mathbf{v}'\rangle) \perp |\mathbf{e}_\alpha\rangle \ \Rightarrow\ |\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{v}'\rangle$.

Si $\mathcal{I}$ es infinito, por la desigualdad finita de Bessel, para cualquier $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ finito,

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{J}} |(|\mathbf{e}_\alpha\rangle, |\mathbf{v}\rangle)|^2 \leq |||\mathbf{v}\rangle||^2$$

$\Rightarrow$ en $\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} v_\alpha |\mathbf{e}_\alpha\rangle$ sólo hay una colección finita, a lo sumo numerable, de términos no nulos.

Demostración del teorema de caracterización de bases ortonormales

La sucesión de sumas parciales, $\{|\mathbf{w}_n\rangle \equiv \sum_{i=1}^{n} v_\alpha |\mathbf{e}_{\alpha_i}\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy,

$$\||\mathbf{w}_n\rangle - |\mathbf{w}_m\rangle\|^2 = \sum_{m+1}^{n} |v_\alpha|^2 \to 0 \,, \quad n > m \to \infty \,.$$

Podemos definir $|\mathbf{v}'\rangle \equiv \lim_{n\to\infty} |\mathbf{w}_n\rangle \in \mathcal{H}$, $(|\mathbf{v}\rangle - |\mathbf{v}'\rangle) \perp |\mathbf{e}_\alpha\rangle \;\Rightarrow\; |\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{v}'\rangle$.

[4] Si $\forall\, |\mathbf{v}\rangle \in \mathcal{H}\,,\; |\mathbf{v}\rangle = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} v_\alpha\, |\mathbf{e}_\alpha\rangle \;\Rightarrow\; \forall\, |\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{w}\rangle \in \mathcal{H}\,,\; (|\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{w}\rangle) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} v_\alpha^\star\, w_\alpha$.

[5] Si $\forall\, |\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{w}\rangle \in \mathcal{H}\,,\; (|\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{w}\rangle) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} v_\alpha^\star\, w_\alpha$, entonces $\|\, |\mathbf{v}\rangle\|^2 = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} |v_\alpha|^2$.

[6] Si $\forall\, |\mathbf{v}\rangle \in \mathcal{H}\,,\; \|\, |\mathbf{v}\rangle\|^2 = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} |v_\alpha|^2$, entonces S es base ortonormal de $\mathcal{H}$.

Si no fuera así, $\exists\, |\mathbf{w}\rangle$ tal que $S \cup \{|\mathbf{w}\rangle\}$ sería ortonormal. Por lo tanto, $|\mathbf{w}\rangle \perp S$, lo que es absurdo porque $1 = |||\mathbf{w}\rangle||^2 = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} |w_\alpha|^2 = 0$.

Espacios de Hilbert separables

La dimensión de $\mathcal{H}$ puede ser finita o infinita. Sea, pues, $\mathcal{H}$ de dimensión $\aleph_0$. Este es el caso de los espacios de Hilbert separables.

Un espacio topológico, X, se llama separable si posee algún subconjunto numerable, siempre denso en X.

E.g., $\mathbb{Q}$ es numerable y denso en $\mathbb{R}$, por tanto $\mathbb{R}$ es separable. Lo mismo puede decirse de $\mathbb{R}^n$ y de $\mathbb{C}^n$. En $\mathcal{C}[a, b]$, los polinomios con coeficientes racionales forman un subconjunto numerable y denso.

Si V es separable y, con respecto a la norma inducida por $(,)$ es un espacio de Hilbert, diremos que $(V, (,))$ es un espacio de Hilbert separable.

En general nos restringiremos en adelante a espacios de Hilbert separables.

Teorema: Un espacio de Hilbert, $\mathcal{H} \neq \{\emptyset\}$, es separable si y sólo si admite una base ortonormal numerable (finita o infinita numerable).

Corolario: La dimensión de todos los espacios de Hilbert separables es o bien finita e igual a $d < \infty$ o bien infinita e igual a $\aleph_0$.

Teorema del Isomorfismo

Dos espacios de Hilbert sobre Ω, $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$, son isomorfos si existe algún isomorfismo lineal $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ que conserva los productos escalares, *i.e.*, $(U|\mathbf{x}\rangle, U|\mathbf{y}\rangle)_{\mathcal{H}_2} = (|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle)_{\mathcal{H}_1}, \ \forall\, |\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle \in \mathcal{H}_1$.

Teorema del isomorfismo: Todo espacio vectorial de Hilbert separable $\mathcal{H}$ sobre Ω, es isomorfo a Ω^d si la dimensión de $\mathcal{H}$ es finita ($d < \infty$), y a Λ^2_Ω si ésta es infinita.

Demostración: Sea $\{|\mathbf{e}_n\rangle\}_{n\in J}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$ con $J = \{1, 2, .., d\}$ o $J = \mathbb{N}$. La aplicación lineal $U : |\mathbf{v}\rangle \in \mathcal{H} \to |\mathbf{x}\rangle = \{(|\mathbf{e}_n\rangle, |\mathbf{v}\rangle)\}_{n\in J} \in \Lambda^2_\Omega$ define el isomorfismo.

Comprobemos que es una biyección:

Es inyectiva porque

$$U\,|\mathbf{v}\rangle = U\,|\mathbf{w}\rangle \ \Rightarrow \ (|\mathbf{e}_n\rangle, |\mathbf{v}\rangle) = (|\mathbf{e}_n\rangle, |\mathbf{w}\rangle) \ \Rightarrow \ |\mathbf{v}\rangle - |\mathbf{w}\rangle \perp |\mathbf{e}_n\rangle \quad \forall n \in J\,.$$

El único vector ortogonal a toda la base es $|\mathbf{0}\rangle \in \mathcal{H}$, *i.e.*, $|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{w}\rangle$.

Teorema del Isomorfismo

Además es sobreyectiva pues para cualquier colección *finita* de números $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=J} \in \Lambda^2_\Omega$ se tiene $\lambda_n = 0$, excepto para $n_1, \ldots, n_p$; el vector $|\mathbf{v}\rangle = \sum_{i=1}^{p} \lambda_{n_i} |\mathbf{e}_{n_i}\rangle$ verifica $U\,|\mathbf{v}\rangle := \{(|\mathbf{e}_{n_i}\rangle, v)\} = \{\lambda_{n_i}\} \in \Lambda^2_\Omega$.

Si fuese infinito también define un único elemento $|\mathbf{v}\rangle \in \mathcal{H}$. Efectivamente, por ser elemento de Λ^2_Ω debe cumplir $\sum_{j\in J} |\lambda_j|^2 < \infty$. Por el lema de convergencia que vimos anteriormente, tenemos que $|\mathbf{v}\rangle := \sum_{j\in J} \lambda_j |\mathbf{e}_j\rangle \in \mathcal{H}$.

Por último, la isometría se cumple por la identidad de Parseval

$$(U\,|\mathbf{v}\rangle, U\,|\mathbf{w}\rangle)_{\Lambda^2_\Omega} \equiv \sum_{n\in J} (|\mathbf{e}_n\rangle, |\mathbf{v}\rangle)^\star\,(|\mathbf{e}_n\rangle, |\mathbf{w}\rangle) = (|\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{w}\rangle)_{\mathcal{H}}\ .$$

En resumen, para cada dimensión existe un sólo tipo de espacio de Hilbert separable, salvo isomorfismo. En particular, $L^2[a,b]$ es isomorfo a Λ^2_Ω.

A la luz del teorema del isomorfismo se entiende el criterio de convergencia del lema, pues la condición de la derecha no es más que la de pertenencia a Λ^2_Ω de un elemento $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \in \Lambda^2_\Omega$.

Algunas bases ortonormales importantes

Veamos algunos ejemplos de bases ortonormales de uso frecuente. Para todas ellas la ortonormalidad es relativamente fácil de verificar. El punto delicado es probar el hecho de que su variedad lineal es densa en $\mathcal{H}$.

Base estándar de $\mathcal{H} = \Lambda^2_\Omega$: Una base numerable ortonormal es

$$\{|\mathbf{e}_k\rangle\}_1^\infty = \{(1,0,0,\ldots),(0,1,0,\ldots),(0,0,1,\ldots),\ldots\} .$$

$$\forall\,|\mathbf{x}\rangle \in \Lambda^2_\Omega \,, \qquad |\mathbf{x}\rangle = \sum_{i=1}^\infty a_i\,|\mathbf{e}_i\rangle \qquad \text{con} \qquad \sum_{i=1}^\infty |a_i|^2 < \infty \,.$$

Base de Legendre de $\mathcal{H} = L^2[-1,+1]$: Los polinomios de Legendre

$$\{|\mathbf{P}_n\rangle\}_0^\infty \to \sqrt{n+\frac{1}{2}}\;P_n(x)\,, \qquad P_n(x) := \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\,,$$

pueden obtenerse aplicando Gramm-Schmidt al conjunto de funciones $\{x^n\}_0^\infty \subset L^2[-1,+1]$, linealmente independiente pero no ortonormal.

Algunas bases ortonormales importantes

Base de Hermite de $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$: Ahora, $\{x^n\}_0^\infty \not\subset \mathcal{H}$. Sin embargo, el conjunto $\{x^n\, e^{-x^2/2}\}_0^\infty \subset \mathcal{H}$, y es linealmente independiente. Tras aplicar el método de ortonormalización, el resultado a que se llega es

$$\{|\phi_n\rangle\}_0^\infty \to \phi_n(x) = \frac{1}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{1/2}}\, e^{-x^2/2}\, H_n(x)\ ,$$

llamadas *funciones de Hermite*, siendo $\{H_n(x)\}_0^\infty$ los polinomios de Hermite

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}\ .$$

Base de Fourier de $\mathcal{H}_\ell = L^2[0,\ell]$: el subconjunto de $L^2(\mathbb{R})$ dado por las funciones periódicas $|\mathbf{f}\rangle \to f(x) = f(x+\ell)$,

$$\{|\mathbf{e}_n\rangle\}_{n\in\mathbb{Z}} \to e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell}}\, e^{i\frac{2\pi n}{\ell}x}\ .$$

constituye una base ortonormal.

Algunas bases ortonormales importantes

Toda función $|\mathbf{f}\rangle \in \mathcal{H}_\ell$ es desarrollable en serie de Fourier relativa a la base de funciones trigonométricas

$$|\mathbf{f}\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n\, |\mathbf{e}_n\rangle \qquad \text{con} \qquad f_n = (|\mathbf{e}_n\rangle, |\mathbf{f}\rangle) = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \int_0^\ell e^{-i\frac{2\pi n}{\ell}x}\, f(x)\, dx$$

$$\text{y} \qquad \||\mathbf{f}\rangle\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |(|\mathbf{e}_n\rangle, |\mathbf{f}\rangle)|^2.$$

Base de Laguerre de $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^+),\ \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$: Partiendo del conjunto $\{x^n\, e^{-x/2}\}_0^\infty \in \mathcal{H}$, y por Gramm-Schmidt, llegamos a una familia ortonormal y numerable $\{\psi_n(x)\}_1^\infty$,

$$|\psi_n\rangle \to \psi_n(x) = e^{-x/2}\, L_n(x)\ ,$$

siendo L_n los polinomios de Laguerre

$$L_n(x) = \frac{1}{n!}\, e^x \frac{d^n}{dx^n}\, (e^{-x} x^n)\ .$$