Tema II: Espacio Dual

José D. Edelstein

Universidade de Santiago de Compostela

FÍSICA MATEMÁTICA

Santiago de Compostela, marzo de 2011

Formas lineales. Aplicación adjunta. Distribuciones. Bases continuas.

Formas lineales y espacio dual

Sea V un espacio lineal. Una forma o funcional lineal $\langle \mathbf{u}|$ (también llamada, simplemente, *bra*), es una aplicación lineal: $\langle \mathbf{u}| : V \to \Omega$,

$$\langle \mathbf{u}| : |\mathbf{v}\rangle \to \langle \mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle \in \Omega \qquad \text{con} \quad \langle \mathbf{u}| \left(|\mathbf{v}_1\rangle + a|\mathbf{v}_2\rangle\right) = \langle \mathbf{u}|\mathbf{v}_1\rangle + a\,\langle \mathbf{u}|\mathbf{v}_2\rangle \; .$$

La evaluación de un *bra*, $\langle \mathbf{u}|$, sobre un *ket*, $|\mathbf{v}\rangle$, se llama también contracción o *braket*, $\langle \mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle$.

El conjunto de todas las forma lineales sobre V, con la operación natural de suma y multiplicación por un elemento de Ω,

$$\langle \mathbf{w}| = \langle \mathbf{w}_1| + a\,\langle \mathbf{w}_2| \quad \Longleftrightarrow \quad \langle \mathbf{w}|\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{w}_1|\mathbf{v}\rangle + a\,\langle \mathbf{w}_2|\mathbf{v}\rangle \qquad \forall\, |\mathbf{v}\rangle \in V$$

constituye el espacio dual $V^\star$.

Imponemos, además, que el elemento neutro de la suma, $\langle \mathbf{0}|$, sea el único con la propiedad

$$\langle \mathbf{0}|\mathbf{v}\rangle = 0 \qquad \forall\, |\mathbf{v}\rangle \in V \; .$$

Base y dimensión

En V, un conjunto linealmente independiente y maximal $\{|\mathbf{e}_i\rangle_{i=1,\ldots,n}\}$, es una base. Todo $|\mathbf{v}\rangle \in V$ admite una expansión de la forma

$$|\mathbf{v}\rangle = v^i\,|\mathbf{e}_i\rangle := \sum_{i=1}^{n} v^i\,|\mathbf{e}_i\rangle\,.$$

Utilizamos la convención de Einstein: los índices contraídos se suman.

$V^\star$ es un espacio lineal por lo que valen las mismas consideraciones que para V. Cuando $\dim(V)$ es finita, la situación se simplifica:

Teorema: Sea V un espacio lineal de dimensión finita $\dim(V) = n$. Entonces V y $V^\star$ son isomorfos. En particular, la dimensión de $V^\star$ es igualmente n.

Trabajaremos en lo que sigue, si no se indica lo contrario, con espacios de dimensión finita.

Corolario: $V^\star$ admite una base de formas lineales $\{\langle\mathbf{u}^i|_{i=1,\ldots,n}\}$, tal que para cualquier $\langle\mathbf{w}| \in V^\star$,

$$\langle\mathbf{w}| = w_i\,\langle\mathbf{u}^i|\,.$$

Base canónica dual y componentes contravariantes

El uso de una base para $V^\star$, $\{\langle \mathbf{u}^i|\}$, unida a la de una base para V, $\{|\mathbf{e}_i\rangle\}$, permite reducir la información necesaria para evaluar cualquier contracción, $\langle \mathbf{w}|\mathbf{v}\rangle$, al conjunto de contracciones elementales $f^i{}_j = \langle \mathbf{u}^i|\mathbf{e}_j\rangle$,

$$\langle \mathbf{w}|\mathbf{v}\rangle = (w_i\langle \mathbf{u}^i|)(v^j|\mathbf{e}_j\rangle) = w_i\, v^j\, \langle \mathbf{u}^i|\mathbf{e}_j\rangle = w_i\, v^j\, f^i{}_j\ .$$

Dada una base $\{|\mathbf{e}_i\rangle\}$ de V, existe una única base canónica dual $\{\langle \mathbf{e}^i|\}$ de $V^\star$, definida por $f^i{}_j = \delta^i{}_j$, *i.e.*,

$$\langle \mathbf{e}^i|\mathbf{e}_j\rangle = \delta^i{}_j \qquad \forall\, i, j = 1, \ldots, n$$

En esta base una contracción general presenta la forma más simple

$$\langle \mathbf{w}|\mathbf{v}\rangle = w_i\, v^j\, \delta^i{}_j = w_i\, v^i\ .$$

El uso de la base dual permite recuperar las componentes contravariantes de $|\mathbf{v}\rangle$ mediante la contracción de dicho vector con los elementos de la base dual

$$v^i = \langle \mathbf{e}^i|\mathbf{v}\rangle\ .$$

Análogamente, las componentes w_i de $\langle \mathbf{w}|$, resultan de

$$w_i = \langle \mathbf{w}|\mathbf{e}_i\rangle\ .$$

Cambios de base

Un espacio vectorial admite infinitas bases. Sean $\{|\mathbf{e}_i\rangle\}$ y $\{|\mathbf{e}'_i\rangle\}$ dos de ellas. Cualquier vector de una de ellas admite una expansión en la otra

$$|\mathbf{e}'_i\rangle = O^j{}_i|\mathbf{e}_j\rangle \qquad \Longleftrightarrow \qquad O^j{}_i = \langle\mathbf{e}^j|\mathbf{e}'_i\rangle \ .$$

El conjunto $\{O^j{}_i\}$ caracteriza completamente el cambio de base.

Los coeficientes de expansión de un vector en ambas bases:

$$|\mathbf{v}\rangle = v^j\,|\mathbf{e}_j\rangle = v'^i\,|\mathbf{e}'_i\rangle = v'^i O^j{}_i\,|\mathbf{e}_j\rangle \ .$$

Por independencia lineal,

$$v^j = O^j{}_i\, v'^i \ .$$

El conjunto de números $\{O^j{}_i\}$ relaciona las bases y los coeficientes de modo inverso. En este sentido decimos que los coeficientes se transforman de forma *contravariante*.

Un operador es una aplicación $\mathcal{O} : |\mathbf{u}\rangle \in V \to |\mathbf{v}\rangle := \mathcal{O}|\mathbf{u}\rangle \in V$. Podemos ver el cambio de base como el resultado de la acción de un operador lineal:

$$\mathcal{O}|\mathbf{e}_i\rangle := |\mathbf{e}'_i\rangle = O^j{}_i|\mathbf{e}_j\rangle \ .$$

Notación matricial

Existe una representación más compacta en términos de matrices.

Por ejemplo, colocamos los coeficientes v^i y v'^j en matrices columna $\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}'$, así como los $O^j{}_i$ en una matriz $\mathbf{O}$ donde j etiqueta las filas e i las columnas:

$$\mathbf{v} = \mathbf{O}\,\mathbf{v}' \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O^1{}_1 & O^1{}_2 & \cdots & O^1{}_n \\ O^2{}_1 & O^2{}_2 & \cdots & O^2{}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O^n{}_1 & O^n{}_2 & \cdots & O^n{}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'^1 \\ v'^2 \\ \vdots \\ v'^n \end{pmatrix},$$

y expresar las coordenadas finales en términos de las iniciales:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{O}^{-1}\,\mathbf{v}\ .$$

El índice j de los vectores $|\mathbf{e}_j\rangle$, en cambio, $|\mathbf{e}'_i\rangle = O^j{}_i|\mathbf{e}_j\rangle$, se suma con el de las filas (notar la diferencia con $v^j = O^j{}_i\, v'^i$):

si $\mathbf{e}$ y $\mathbf{e}'$ son matrices columna con entradas $|\mathbf{e}_j\rangle$ y $|\mathbf{e}'_i\rangle$,

$$\mathbf{e}'^t = \mathbf{e}^t\,O \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{e}' = O^t\,\mathbf{e}\ .$$

Notación para los índices de bases transformadas

Si construimos las matrices A y B con los elementos $A^i{}_j$ y $B^i{}_j$, entonces

$$(A\,B)^i{}_k = \sum_{j=1}^{n} A^i{}_j\, B^j{}_k \qquad (A^t\,B)^i{}_k = \sum_{j=1}^{n} A_j{}^i\, B^j{}_k\ .$$

Usaremos la siguiente notación para los cambios de base. La base de partida recibirá índices $i, j, \ldots$ y los de la transformada serán $i', j', \ldots$, ambos dentro del mismo rango $(1, \ldots, n)$.

Así, no es necesario mantener la prima encima de los objetos referidos a la base transformada; $v^{i'} := v'^{i'}$ y $|\mathbf{e}_{i'}\rangle := |\mathbf{e}'_{i'}\rangle$. Sólo al dar valores numéricos se deberá restituir la prima; *e.g.*, cuando $i' = 2$, $|\mathbf{e}_{i'}\rangle \to |\mathbf{e}'_2\rangle$.

Con esta convención, es natural llamar $O^i{}_{j'}$ al conjunto de datos necesarios para expresar la base $\{|\mathbf{e}_i\rangle\}$ en la base $\{|\mathbf{e}_{j'}\rangle\}$,

$$|\mathbf{e}_{j'}\rangle = O^i{}_{j'}\,|\mathbf{e}_i\rangle \qquad \text{y} \qquad |\mathbf{e}_i\rangle = O^{j'}{}_i\,|\mathbf{e}_{j'}\rangle\ ,$$

al cambio de base inverso generado por el conjunto $O^{j'}{}_i$.

Relación de cierre

Basta ahora componer dos transformaciones de ida y vuelta,

$$|\mathbf{e}_i\rangle = O^{j'}{}_i\,|\mathbf{e}_{j'}\rangle = O^{j'}{}_i\,O^k{}_{j'}\,|\mathbf{e}_k\rangle \ ,$$

para descubrir que verifican la relación de cierre:

$$O^k{}_{j'}\,O^{j'}{}_i = \delta^k{}_i \ .$$

En lenguaje matricial esto quiere decir que las matrices formadas por los números $O^i{}_{i'}$ y $O^{i'}{}_i$ son inversas entre sí,

$$O^i{}_{i'} \to \mathbf{O} \qquad O^{i'}{}_i \to \mathbf{O}^{-1} \ ,$$

entonces la relación de cierre equivale a $\mathbf{O}\,\mathbf{O}^{-1} = 1$.

Tal como la distinción entre índices con prima y sin prima es convencional, también debe verificarse la relación de cierre inversa

$$O^{i'}{}_j\,O^j{}_{k'} = \delta^{i'}{}_{k'} \ ,$$

o, matricialmente $\mathbf{O}^{-1}\,\mathbf{O} = 1$.

Índices covariantes y contravariantes

En esta notación, la forma en la que aparece $O^{i'}{}_j$ es natural. Es la única consistente al dejar los mismos índices libres en ambos miembros.

Análogamente, si queremos conectar los coeficientes $v^{i'}$ con los v^j, la única forma *gramaticalmente* consistente es

$$v^{i'} = O^{i'}{}_j \, v^j \qquad \text{o bien} \qquad v^j = O^j{}_{i'} \, v^{i'} \ ,$$

que muestra que las componentes son magnitudes contravariantes.

Esto pone de manifiesto el *carácter* bajo transformaciónes lineales de la base, haciéndolo depender de la posición en la que se encuentran los índices.

Los índices para los elementos de la base dual también codifican sus propiedades de transformación. Si a $\{|\mathbf{e}_i\rangle\}$ le corresponde la base dual $\{\langle\mathbf{e}^j|\}$, a la base transformada $\{|\mathbf{e}_{i'}\rangle\}$ le deberá corresponder $\{\langle\mathbf{e}^{i'}|\}$ que satisface

$$\langle\mathbf{e}^{i'}|\mathbf{e}_{j'}\rangle = \delta^{i'}{}_{j'} \quad \Rightarrow \quad \langle\mathbf{e}^{i'}|O^i{}_{j'}|\mathbf{e}_i\rangle = \delta^{i'}{}_{j'} \quad \Rightarrow \quad \langle\mathbf{e}^{i'}| = O^{i'}{}_k \, \langle\mathbf{e}^k| \ ,$$

puesto que, entonces:

Índices covariantes y contravariantes

$$\langle \mathbf{e}^{i'} | \mathbf{e}_{j'} \rangle = O^{i'}{}_k \, O^i{}_{j'} \, \langle \mathbf{e}^k | \mathbf{e}_i \rangle = O^{i'}{}_k \, O^i{}_{j'} \, \delta^k{}_i = O^{i'}{}_k \, O^k{}_{j'} = \delta^{i'}{}_{j'} \; .$$

La regla de transformación de $\langle \mathbf{e}^k |$ es la única consistente con la posición de los índices: las formas lineales se transforman de manera contravariante con respecto a los vectores.

Nos queda por examinar cómo se transforman las componentes w_i de una forma lineal. Frente a un cambio de base

$$\langle \mathbf{w} | = w_i \, \langle \mathbf{e}^i | = w_{j'} \, \langle \mathbf{e}^{j'} | = w_{j'} \, O^{j'}{}_i \, \langle \mathbf{e}^i | \; .$$

Entonces, los números w_i y $w_{j'}$ están relacionados por

$$w_i = O^{j'}{}_i \, w_{j'} \qquad \Longrightarrow \qquad w_{i'} = O^j{}_{i'} \, w_j \; ,$$

Tal como revela la posición de los subíndices, los coeficientes de las formas se transforman *igual* que los vectores de la base de modo que se dice que lo hacen de manera covariante.

Resumiendo...

El conjunto de números, $O^i{}_{j'}$, define un cambio de base con respecto al cual las cuatro magnitudes estudiadas se agrupan esencialmente en dos:

- Covariantes: (con el índice abajo) se transforman como $\ell_{i'} = O^i{}_{i'}\,\ell_i$. Por ejemplo los *vectores de la base* $|\mathbf{e}_i\rangle$ o las *componentes de una forma* w_i.
- Contravariantes: (con el índice arriba) se transforman como $\ell^{i'} = O^{i'}{}_i\,\ell^i$. Por ejemplo las *componentes de vectores* v^i o los *vectores de la base dual* $\langle\mathbf{e}^i|$.

La gran claridad y simetría de esta notación se obtiene a expensas de tener que trabajar con índices. Nótese que en ningún momento hemos hablado de matrices sino de conjuntos de números.

Se puede recurrir a la formulación matricial, pero hay que tener cuidado con la identificación de los índices con las filas y columnas pudiendo requerirse la inclusión de transposiciones o inversiones oportunas.

Un cambio de base es una transformación pasiva. El vector $|\mathbf{v}\rangle$ no cambia, lo que varía es su descripción debido a la modificación de la base $|\mathbf{e}_i\rangle \to |\mathbf{e}_{i'}\rangle$.

Transformaciones activas y pasivas

Las componentes contravariantes se transforman con la matriz inversa para compensar el cambio producido en la base y mantener al vector invariante.

Por el contrario, una transformación activa implica un cambio del vector en cuestión, quedando intacta la base: $|\mathbf{v}\rangle \to |\mathbf{v}'\rangle = O\,|\mathbf{v}\rangle$ indica que el vector de componentes v^i pasa a otro de componentes $v'^{i'}$ en la misma base.

Si $v'^{i'} = O^{i'}{}_i\, v^i$, la acción que representa O es inversa en las componentes y en la base. Por ejemplo, pensemos que O es una rotación de ángulo θ en el plano,

$$O^{i'}{}_j = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} .$$

El cambio que produce en las componentes admite dos interpretaciones:

a) (activa) el vector ha sido rotado un ángulo θ ($O^{i'}{}_i$ son las componentes de O actuando sobre $|\mathbf{v}\rangle$).

b) (pasiva) el vector es el mismo, expresado en una base nueva, girada un ángulo $-\theta$ con respecto a la antigua (O^{-1} actuando sobre la base $\{|\mathbf{e}_i\rangle\}$).

La aplicación adjunta, $^\dagger : V \to V^\star$

A cada ket le corresponde un bra. Sea $(V, (\,,\,))$ un $\mathcal{H}$. El producto escalar da una manera de elegir, para cada $|\mathbf{v}\rangle \in V$, un $\langle\mathbf{v}| \in V^\star$. Denominamos a ésta aplicación adjunta, $^\dagger : V \to V^\star$:

$$|\mathbf{v}\rangle \to |\mathbf{v}\rangle^\dagger := \langle\mathbf{v}| \, .$$

Para cada $|\mathbf{w}\rangle \in V$ el adjunto $|\mathbf{w}\rangle^\dagger \equiv \langle\mathbf{w}| \in V^\star$ es el único elemento que

$$\forall\, |\mathbf{v}\rangle \in V \qquad \text{verifica} \qquad \langle\mathbf{w}|\mathbf{v}\rangle = (|\mathbf{w}\rangle, |\mathbf{v}\rangle) \, .$$

Comprobamos la unicidad. Si $|\mathbf{u}\rangle^\dagger = \langle\mathbf{u}| = \langle\mathbf{u}'|$, con $\langle\mathbf{u}| \neq \langle\mathbf{u}'|$, entonces

$$\forall\, |\mathbf{v}\rangle \in V \quad \langle\mathbf{u} - \mathbf{u}'|\mathbf{v}\rangle = (|\mathbf{0}\rangle, |\mathbf{v}\rangle) = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle\mathbf{u}| - \langle\mathbf{u}'| = \langle\mathbf{0}| \quad \Leftrightarrow \quad \langle\mathbf{u}| = \langle\mathbf{u}'| \, .$$

El modo consistente de extender la acción de la aplicación adjunta a Ω, si $|\mathbf{u}\rangle = |\mathbf{v}\rangle + \lambda|\mathbf{w}\rangle$, es $\langle\mathbf{u}| = \langle\mathbf{v}| + \lambda^\star\langle\mathbf{w}|$, ya que $\langle\mathbf{u}|\mathbf{x}\rangle$:

$$(|\mathbf{u}\rangle, |\mathbf{x}\rangle) = (|\mathbf{v}\rangle + \lambda|\mathbf{w}\rangle, |\mathbf{x}\rangle) = (|\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{x}\rangle) + \lambda^\star(|\mathbf{w}\rangle, |\mathbf{x}\rangle) = (\langle\mathbf{v}| + \lambda^\star\langle\mathbf{w}|)|\mathbf{x}\rangle \, .$$

La acción de † se extiende a Ω como la conjugación compleja $^\dagger : \lambda \to \lambda^\star$.

Bases adjunta y dual

Denotemos con g_{ij} el conjunto de los productos escalares elementales entre los elementos de la base $|\mathbf{e}_i\rangle$,

$$g_{ij} := (|\mathbf{e}_i\rangle, |\mathbf{e}_j\rangle) = (|\mathbf{e}_j\rangle, |\mathbf{e}_i\rangle)^\star = g_{ji}^\star \ .$$

Asociadas a la misma base de V tenemos dos bases para $V^\star$:

$$|\mathbf{e}_i\rangle \to \begin{cases} \text{base canónica dual:} & \langle \mathbf{e}^i| & \langle \mathbf{e}^i|\mathbf{e}_j\rangle = \delta^i{}_j \\ \text{base adjunta:} & \langle \mathbf{e}_i| = |\mathbf{e}_i\rangle^\dagger & \langle \mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j\rangle = (|\mathbf{e}_i\rangle, |\mathbf{e}_j\rangle) = g_{ij} \end{cases}$$

Ambas deben estar relacionadas linealmente, de forma que las expresiones anteriores sean compatible. De hecho,

$$\langle \mathbf{e}_i| = g_{ij} \, \langle \mathbf{e}^j| \ .$$

Supongamos que expandimos un cierto *ket* en una base, $|\mathbf{w}\rangle = w^i \, |\mathbf{e}_i\rangle$. El *bra* asociado, $\langle \mathbf{w}| = |\mathbf{w}\rangle^\dagger$ admite dos expansiones, según la base que utilicemos:

$$\langle \mathbf{w}| = \langle \mathbf{e}^j| \, w_j \ \text{ o } \ \langle \mathbf{w}| = (w^i|\mathbf{e}_i\rangle)^\dagger = \langle \mathbf{e}_i| \, w^{i\star} = g_{ij} \, \langle \mathbf{e}^j| \, w^{i\star} \quad \Rightarrow \quad w_j = w^{i\star} \, g_{ij} \ .$$

Se denomina a esta última operación, bajar el índice.

Bases adjunta y dual

Si $\{|\mathbf{e}_i\rangle\}$ es una base ortonormal tenemos que

$$\langle \mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j\rangle = (|\mathbf{e}_i\rangle, |\mathbf{e}_j\rangle) = \delta_{ij} \qquad \Rightarrow \qquad w_i = w^{j\star}\,\delta_{ji} = w^{i\star} \ .$$

Si $c \in \mathbb{C}$, a veces se escribe $|c\,\mathbf{v}\rangle$ para denotar $c\,|\mathbf{v}\rangle$. † es *anti-lineal*:

$$\langle c\,\mathbf{v}| = |c\,\mathbf{v}\rangle^\dagger = (c\,|\mathbf{v}\rangle)^\dagger = c^\star\langle\mathbf{v}|$$

Ejemplo: Estado Cuántico

En mecánica cuántica, el estado de un sistema viene caracterizado por un vector de un cierto espacio de Hilbert complejo $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$. En general se utiliza una base $|\mathbf{e}_i\rangle$ de autoestados de algún operador hermítico O (observable).

Escribiendo $|\psi\rangle = c^i\,|\mathbf{e}_i\rangle$, los coeficientes c^i se interpretan como la densidad de probabilidad de obtener como resultado de una medida el autovalor λ_i asociado al autovector $|\mathbf{e}_i\rangle$.

Por ser O hermítico, la base puede escogerse ortonormal; así, $\langle\psi| = c_j\,\langle\mathbf{e}^j|$ con $c_j = c^{j\star}$. Diremos que $|\psi\rangle$ está normalizado (la suma de probabilidades es la unidad) si $\langle\psi|\psi\rangle = c_i\,c^i = \sum_i |c^i|^2 = 1$.

Producto escalar no-degenerado

A las propiedades del producto escalar le podemos añadir la siguiente

- no-degeneración: Si $(|\mathbf{u}\rangle, |\mathbf{x}\rangle) = 0 \quad \forall\, |\mathbf{u}\rangle \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{x}\rangle = 0$.

Cuando $\dim V$ es finita, demostramos que la condición de no-degeneración es equivalente a la invertibilidad de g_{ij}. En efecto,

$$|\mathbf{u}\rangle = u^i\,|\mathbf{e}_i\rangle\ ,\ |\mathbf{x}\rangle = x^i\,|\mathbf{e}_i\rangle \ \Rightarrow\ (|\mathbf{u}\rangle, |\mathbf{x}\rangle) = u^{i\star} g_{ij}\, x^j = 0 \ \stackrel{\forall\, u^i}{\Longrightarrow}\ g_{ij}\, x^j = 0\ .$$

Este sistema homogéneo sólo debe tener por solución $x^j = 0$, entonces:

$$(\,,\,)\ \text{ no degenerado} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \det g_{ij} \neq 0\ .$$

Cuando el producto escalar es no-degenerado podemos invertir la matriz g_{ij} en cualquier base. Denotamos su inversa mediante

$$g^{\,ij} := g_{ij}^{-1} = g^{\,ji*}\ .$$

Otra manera de decir lo mismo es afirmar que

$$g^{\,ik}\, g_{kj} = \delta^i{}_j = g_{jk}\, g^{\,ki}\ .$$

Si el producto escalar es no-degenerado podemos invertir $w_j = w^{i\star}\, g_{ij}$ multiplicando en ambos lados por g^{jk},

$$w^{k\star} = w_j\, g^{jk} = g^{kj\star} w_j \qquad \text{ya que} \qquad w^{i\star} g_{ij}\, g^{jk} = w^{i\star} \delta_i{}^k = w^{k\star} \;.$$

Es decir, conjugando esta ecuación,

$$w^i = g^{ij} w_j^\star \;.$$

Hagamos una verificación de consistencia

$$\langle \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle = w_j\, v^j = w^{i\star} g_{ij}\, g^{jk} v_k^\star = w^{i\star} \delta_i{}^k v_k^\star = w^{i\star}\, v_i^\star = (v_i\, w^i)^\star = \langle \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle^\star$$

En resumen, en un espacio lineal *de dimensión finita* con producto escalar no-degenerado, siempre podemos asociar a cualquier forma $\langle \mathbf{w}|$ un vector $|\mathbf{w}\rangle$; las componentes se relacionan por la ecuación anterior.

Es decir, la aplicación adjunta es biyectiva.

Si $\mathcal{H}$ es separable admite una base ortonormal numerable y los resultados pueden extenderse sin más que dejar que los subíndices $i, j, i', j', \ldots \in \mathbb{N}$.

Sin embargo, deja de ser cierto que V y $V^\star$ sean automáticamente isomorfos aunque $\mathcal{H}$ sea no-degenerado en el sentido de la sección anterior. No todos los $\langle \mathbf{w}| \in V^\star$ son de la forma $(|\mathbf{w}\rangle, \cdot)$ para algún $|\mathbf{w}\rangle \in V$.

Sea, por ejemplo, $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$. A cada función $f(x)$, tal que $\int_\mathbb{R} |f(x)|^2 dx < \infty$, le corresponde un vector $|\mathbf{f}\rangle \in L^2(\mathbb{R})$.

Podemos tomar una sucesión de vectores $|\mathbf{u}^n_{x_0}\rangle \to u^n_{x_0}(x)$ con $n \in \mathbb{N}$, dada por

$$u^n_{x_0}(x) = \begin{cases} 0 & |x - x_0| \geq \frac{1}{2n} \\ n & |x - x_0| < \frac{1}{2n} \end{cases} \qquad \to \qquad |\mathbf{u}^n_{x_0}\rangle \in L^2(\mathbb{R}) \ .$$

$\forall\, u^n_{x_0}(x),\ \exists\, \langle \mathbf{u}^n_{x_0}| \in L^{2\star}(\mathbb{R})$ tal que, $\forall\, |\mathbf{g}\rangle \in L^2(\mathbb{R})$, se cumple

$$\langle \mathbf{u}^n_{x_0}|\mathbf{g}\rangle = (|\mathbf{u}^n_{x_0}\rangle, |\mathbf{g}\rangle) = \int_{-\infty}^{\infty} u^n_{x_0}(x)\, g(x) dx \ .$$

Por un lado, la norma $\| |\mathbf{u}^n_{x_0}\rangle \| = \sqrt{n}$ diverge cuando $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} |\mathbf{u}^n_{x_0}\rangle \notin L^2(\mathbb{R}) \; .$$

Sin embargo, en este límite la integral anterior alcanza un valor bien definido

$$\lim_{n\to\infty} \langle \mathbf{u}^n_{x_0}|\mathbf{g}\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u^n_{x_0}(x)\; g(x)dx = \lim_{n\to\infty} g(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} u^n_{x_0}(x)dx = g(x_0) \; ,$$

$\forall\, |\mathbf{g}\rangle \in L^2(\mathbb{R})$. La sucesión $\langle \mathbf{u}^n_{x_0}|$ sí converge dentro de $L^{2\star}(\mathbb{R})$,

$$\lim_{n\to\infty} \langle \mathbf{u}^n_{x_0}| = \langle \mathbf{x}_0| \in L^{2\star}(\mathbb{R}) \; ,$$

y puede definirse por su acción sobre cualquier vector $|\mathbf{g}\rangle \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\langle \mathbf{x}_0|\mathbf{g}\rangle = g(x_0) \; .$$

Asociamos $\langle \mathbf{x}_0|$ a la delta de Dirac $\delta(x - x_0)$ del mismo modo que $|\mathbf{g}\rangle \to g(x)$.

Ondas Planas

Sea una sucesión de funciones con la forma de una onda plana truncada en un intervalo de longitud $L \in \mathbb{N}$.

$$|\mathbf{v}^L_{p_0}\rangle \;\to\; v^L_{p_0}(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geq \frac{L}{2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ip_0 x} & |x| < \frac{L}{2} \end{cases} \quad \to \quad |\mathbf{v}^L_{p_0}\rangle \in L^2(\mathbb{R}) \,.$$

Cuando $L \to \infty$, $\| |\mathbf{v}^L_{p_0}\rangle \| = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \to \infty$; el límite no es un elemento de $L^2(\mathbb{R})$. Sin embargo, si a cada elemento le asociamos un dual:

$$\langle \mathbf{v}^L_{p_0} | \mathbf{g} \rangle = (|\mathbf{v}^L_{p_0}\rangle, |\mathbf{g}\rangle) = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-ip_0 x}\, g(x) \,,$$

cuando $L \to \infty$, la cantidad $\langle \mathbf{v}^L_p | \mathbf{g} \rangle$ alcanza un límite

$$\lim_{L\to\infty} \langle \mathbf{v}^L_{p_0} | \mathbf{g} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ip_0 x} g(x) = \bar{g}(p_0) \,,$$

que es el valor de la transformada de Fourier $\bar{g}(p_0)$.

Ondas Planas

En consecuencia, podemos definir

$$\lim_{L\to\infty} \langle \mathbf{v}^L_{p_0}| \equiv \langle \mathbf{p_0}| \in L^{2\star}(\mathbb{R}) \ ,$$

por su acción sobre todos los elementos $|\mathbf{g}\rangle \in L^2(\mathbb{R})$ definida por

$$\langle \mathbf{p}_0|\mathbf{g}\rangle = \bar{g}(p_0) \ .$$

$L^{2\star}(\Omega)$ no es, por lo tanto, isomorfo a $L^2(\Omega)$, sino que es más grande.

Vimos que hay funciones que no son de cuadrado integrable y sin embargo mantienen un producto escalar finito con cualquier vector de este espacio: se les puede asociar un elemento de $L^{2\star}(\Omega)$.

Por ejemplo, los dos conjuntos de formas $\{\langle \mathbf{x}|\}$ $(x \in \mathbb{R})$ y $\{\langle \mathbf{p}|\}$ $(p \in \mathbb{R})$.

Se denomina distribuciones a estos elementos de $L^{2\star}(\Omega)$.

Bases Continuas

Cualquiera de los dos conjuntos de formas, $\{\langle \mathbf{x}|\}$ $(x \in \mathbb{R})$ y $\{\langle \mathbf{p}|\}$ $(p \in \mathbb{R})$, permite reconstruir completamente las funciones $f(x)$ y $\bar{f}(p)$, asociadas a cualquier vector $|\mathbf{f}\rangle \in L^2(\mathbb{R})$

$$f(x) = \langle \mathbf{x}|\mathbf{f}\rangle \qquad\qquad \bar{f}(p) = \langle \mathbf{p}|\mathbf{f}\rangle$$

Por tanto, podemos definir una base generalizada, formada por un conjunto continuo de vectores $\langle \mathbf{x}| \to |\mathbf{x}\rangle$ y $\langle \mathbf{p}| \to |\mathbf{p}\rangle$ con los que poder escribir

$$|\mathbf{f}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \langle \mathbf{x}|\mathbf{f}\rangle\, |\mathbf{x}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\; f(x)\, |\mathbf{x}\rangle \ ,$$

o bien

$$|\mathbf{f}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp\, \langle \mathbf{p}|\mathbf{f}\rangle\, |\mathbf{p}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp\; \bar{f}(p)\, |\mathbf{p}\rangle \ .$$

Estrictamente hablando, ni $|\mathbf{x}\rangle$ ni $|\mathbf{p}\rangle$ tienen norma finita. Por ejemplo, ninguna de las dos admite la interpretación de una función de onda.

Base canónica dual de una base continua

Se trata de un par de bases continuas y sólo sirven al efecto de escribir una expansión formal.

Su utilidad, sin embargo, es mayor al generalizar la relación de dualidad canónica entre las bases $\{\langle x|, \langle p|\}$ y $\{|x\rangle, |p\rangle\}$ de la forma siguiente:

$$\langle x'|x\rangle = \delta(x' - x) \qquad \langle p'|p\rangle = \delta(p' - p) \ .$$

Al tratar con bases continuas debemos sustituir ${\delta^i}_j$ por $\delta(x' - x)$.

El análogo de ${O^{j'}}_i = \langle \mathbf{e}^{j'}|\mathbf{e}_i\rangle$ es, ahora,

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ipx} \qquad \langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-ipx} \ ,$$

mientras que el análogo de $|\mathbf{e}'_i\rangle = {O^j}_i|\mathbf{e}_j\rangle$ debe leerse formalmente como

$$|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx}\, |p\rangle\, dp \qquad |p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx}\, |x\rangle\, dx \ .$$

La delta de Dirac

La compatibilidad equivale a la transformada de Fourier de la delta de Dirac

$$\delta(x'-x) = \langle x'|x\rangle = \left(\int_{-\infty}^{\infty} dp' \, \langle x'|p'\rangle \, \langle p'|\right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dp' \, \langle p|x\rangle \, |p\rangle\right)$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} dp' dp \, \frac{e^{ip'x'}}{\sqrt{2\pi}} \, \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\pi}} \, \delta(p'-p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \, e^{ip(x'-x)} \, .$$

Análogamente,

$$\delta(p'-p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} e^{-ix(p'-p)} \, .$$

Otras definiciones de $\delta(x)$ que pueden resultar útiles:

$$\delta(x-x_0) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{2\epsilon} \, e^{-\frac{|x-x_0|}{\epsilon}} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{(x-x_0)^2+\epsilon^2} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} \, e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\epsilon}}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x-x_0}{\epsilon}\right)}{(x-x_0)} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\epsilon}{\pi} \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x-x_0}{\epsilon}\right)}{(x-x_0)^2} = \cdots$$

Propiedades de $\delta(x)$

Propiedades que se demuestran sobre cualquier función de prueba:

- Sea $g(x)$ una función y $\{x_j\}$ el conjunto de todas sus raíces, $g(x_j) = 0$,

$$\delta(g(x)) = \sum_j \frac{1}{|g'(x_j)|}\, \delta(x - x_j)| \,.$$

  Si $g(x)$ tiene ceros múltiples (tales que $g'(x_j) = 0$), entonces $\delta(g(x))$ no tiene sentido. Esta propiedad implica, en particular

$$\delta(-x) = \delta(x) \qquad\qquad \delta(c\,x) = \frac{1}{|c|}\delta(x) \,.$$

- Se cumple la identidad $x\,\delta(x) = 0$ y, de manera más general,

$$g(x)\,\delta(x - x_0) = g(x_0)\,\delta(x - x_0) \,.$$

- Definimos la derivada de $\delta(x)$ a través de la integración por partes

$$\int g(x)\,\delta'(x - x_0) dx = -\int g'(x)\,\delta(x - x_0) dx = -g'(x_0) \,.$$

Derivadas y primitivas de $\delta(x)$

Podemos obtener una expresión más general a partir de

$$\int f(x)\,\delta^{(n)}(x)dx = -\int \frac{\partial f}{\partial x}\,\delta^{(n-1)}(x)dx\ .$$

Por lo tanto, si $f(x) = x\,g(x)$,

$$\int x\,g(x)\,\delta'(x)dx = -\int (g(x) + x\,g'(x))\,\delta(x)dx = -\int g(x)\,\delta(x)dx\ .$$

Podemos leer la ecuación anterior como:

$$x\,\delta'(x) = -\delta(x) \qquad \Rightarrow \qquad x^n\,\delta^{(n)}(x) = (-1)^n n!\,\delta(x)\ .$$

La *función escalón*, $\theta(x - x_0)$, definida por

$$\theta(x - x_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

tampoco pertenece a $L^2(\mathbb{R})$. Verifica la siguiente relación con $\delta(x)$,

$$\theta(x - x_0) = \int_{-\infty}^{x} \delta(x - x_0)\,dx \qquad \Leftrightarrow \qquad \delta(x - x_0) = \theta'(x - x_0)\ .$$