Tema III: Tensores

José D. Edelstein

Universidade de Santiago de Compostela

FÍSICA MATEMÁTICA

Santiago de Compostela, marzo de 2011

Producto tensorial de espacios. Tensores. Operaciones con tensores. Tensores simétricos y antisimétricos. Tensor métrico.

Producto tensorial de espacios vectoriales

El espacio vectorial producto directo de $V^{(1)}$ y $V^{(2)}$, $V := V^{(1)} \otimes V^{(2)}$, es el conjunto de pares ordenados $|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{v}_1\rangle \otimes |\mathbf{v}_2\rangle$, con $|\mathbf{v}_1\rangle \in V^{(1)}$ y $|\mathbf{v}_2\rangle \in V^{(2)}$, y *todas sus combinaciones lineales* $\lambda\left(|\mathbf{v}_1\rangle \otimes |\mathbf{v}_2\rangle\right) + \mu\left(|\mathbf{w}_1\rangle \otimes |\mathbf{w}_2\rangle\right) + \ldots$

El producto tensorial es lineal en cada argumento. Esto quiere decir que

$$(\lambda\,|\mathbf{v}_1\rangle + \mu\,|\mathbf{w}_1\rangle) \otimes |\mathbf{v}_2\rangle \equiv \lambda\left(|\mathbf{v}_1\rangle \otimes |\mathbf{v}_2\rangle\right) + \mu\left(|\mathbf{w}_1\rangle \otimes |\mathbf{v}_2\rangle\right)\,,$$

con una identidad semejante para el segundo argumento.

Si $\{|\mathbf{e}^{(1)}_{i=1,\cdots,d_1}\rangle\}$ es base de $V^{(1)}$ y $\{|\mathbf{e}^{(2)}_{\alpha=1,\ldots,d_2}\rangle\}$ es base de $V^{(2)}$, una base para $V = V^{(1)} \otimes V^{(2)}$ está dada por todos los pares $\{|\mathbf{e}_{i\alpha}\rangle := |\mathbf{e}^{(1)}_i\rangle \otimes |\mathbf{e}^{(2)}_\alpha\rangle\}$.

Por tanto, la dimensión de $V = V^{(1)} \otimes V^{(2)}$ es $d = d_1 d_2$.

Notar la diferencia con el producto cartesiano $V^{(1)} \times V^{(2)}$, en el que la suma de elementos se induce a partir de las sumas en cada espacio por separado; si $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$, entonces $\mathbf{v} + \mathbf{u} = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_1) \times (\mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_2)$.

Es evidente que la dimensión de $V = V^{(1)} \times V^{(2)}$ es $d = d_1 + d_2$.

Un vector $|\mathbf{u}\rangle \in V^{(1)} \otimes V^{(2)}$ admite una descomposición única

$$|\mathbf{u}\rangle = u^{i\alpha}\,|\mathbf{e}_{i\alpha}\rangle = u^{i\alpha}\,|\mathbf{e}_i^{(1)}\rangle \otimes |\mathbf{e}_\alpha^{(2)}\rangle \ .$$

En general, no es posible encontrar $|\mathbf{v}_1\rangle$ y $|\mathbf{v}_2\rangle$ tales que $|\mathbf{u}\rangle = |\mathbf{v}_1\rangle \otimes |\mathbf{v}_2\rangle$.

Ejemplo: La función de onda de espín

El producto tensorial aparece cuando tenemos que representar más de una propiedad de un sistema.

La función de onda de un electrón describe la densidad de probabilidad de encontrarlo en una posición $\vec{x}$, con una determinada componente del espín, s_z igual a $s_1 = +\frac{1}{2}$ ó $s_2 = -\frac{1}{2}$.

Por ello la representamos mediante $\psi^i(\vec{x})$. Éstas son las componentes de un vector $|\Psi\rangle \in \mathbb{C}^2 \otimes L^2(\mathbb{R}^3)$,

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1,2} \int d^3x\ \psi^i(\vec{x})\ |s_i\rangle \otimes |\vec{x}\rangle \ .$$

Ejemplo: Estados entrelazados

La función de onda de un sistema de dos electrones es un elemento del espacio vectorial producto directo: $\mathbb{C}^2 \otimes L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2 \otimes L^2(\mathbb{R}^3)$.

Si obviamos la parte espacial y adoptamos una base $|s_i\rangle_{1,2}$ de autoestados de S_z, el estado de espín más general en que puede encontrarse el sistema es

$$|\Psi\rangle_{12} = \sum_{i,j=1,2} s^{ij} |s_i\rangle_1 \otimes |s_j\rangle_2 \ .$$

donde los coeficientes s^{ij} han de ser amplitudes de probabilidad:

$$\sum_{i,j=1,2} |s^{ij}|^2 = 1 \ .$$

En general, no es posible escribir $|\Psi\rangle_{12} = |\phi\rangle_1 \otimes |\varphi\rangle_2$, salvo para valores especiales de s^{ij}. En ese caso hablaremos de un *estado separable*; si no, de un *estado entrelazado*.

Un estado inicialmente separable, $|\phi\rangle_1 \otimes |\varphi\rangle_2$ evolucionará genéricamente a un estado entrelazado si existe interacción entre los subsistemas 1 y 2.

Ejemplo: Estados entrelazados

En un estado separable, la medida de un observador sobre un subsistema no afecta a la función de onda del otro subsistema.

Por ejemplo, usando la notación $|s_1\rangle = |\uparrow\rangle$ y $|s_2\rangle = |\downarrow\rangle$; si al medir sobre el estado $|\phi\rangle_1$ encontramos $|\uparrow\rangle_1$, habremos efectuado la operación (no unitaria)

$$|\phi\rangle_1 \otimes |\varphi\rangle_2 \quad \xrightarrow{S_z} \quad |\uparrow\rangle_1 \otimes |\varphi\rangle_2 \, .$$

En un estado entrelazado, en cambio, el resultado de medir sobre 1 afecta al estado que describe el sistema 2. Por ejemplo, podriamos tener

$$|\uparrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2 \quad \xrightarrow{S_z} \quad |\uparrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2 \, .$$

Este tipo de correlaciones pueden parecer inocentes. Sin embargo no lo son tanto si se piensa que los dos subsistemas 1 y 2 que comparten un estado entrelazado pueden residir a miles de kilometros de distancia.

Este tipo de correlaciones se estudian actualmente en el contexto de la Teoría Cuántica de la Información.

Tensores

En lo que sigue consideraremos casos particulares en los que $V_1, V_2 = V$ ó $V^\star$. La dimensión del espacio producto es, entonces, d^2.

Por ejemplo, para $V \otimes V$ tenemos la base $\{|\mathbf{e}_{ij}\rangle := |\mathbf{e}_i\rangle \otimes |\mathbf{e}_j\rangle\}$, mientras que en $V \otimes V^\star$ tenemos otra del tipo $\{|\mathbf{e}_i{}^j\rangle = |\mathbf{e}_i\rangle \otimes \langle \mathbf{e}^j|\}$.

Un vector de $V \otimes V$ admite una expansión en la base anterior

$$|\mathbf{v}\rangle = v^{ij}\,|\mathbf{e}_{ij}\rangle = v^{ij}\,|\mathbf{e}_i\rangle \otimes |\mathbf{e}_j\rangle \ .$$

y uno de $V \otimes V^\star$, análogamente, puede desarrollarse en la forma

$$|\mathbf{w}\rangle = w^i{}_j\,|\mathbf{e}_i{}^j\rangle = w^i{}_j\,|\mathbf{e}_i\rangle \otimes \langle \mathbf{e}^j| \ .$$

Un cambio de base en V implica un cambio en $V \otimes V$ de la forma

$$|\mathbf{e}_{i'j'}\rangle = O^i{}_{i'}\,O^j{}_{j'}\,|\mathbf{e}_{ij}\rangle \ .$$

Naturalmente, se produce un cambio de base en $V^\star$ que produce:

$$|\mathbf{e}_{i'}{}^{j'}\rangle = O^i{}_{i'}\,O^{j'}{}_j\,|\mathbf{e}_i{}^j\rangle \ .$$

Inmediatamente, sin más que invocar *invariancia* de los objetos geométricos $|\mathbf{v}\rangle$ y $|\mathbf{w}\rangle$ frente a cualquier cambio de base, se deduce que

$$v^{i'j'} = O^{i'}{}_i \, O^{j'}{}_j \, v^{ij} \qquad\qquad v^{i'}{}_{j'} = O^{i'}{}_i \, O^{j}{}_{j'} \, v^{i}{}_j \ ,$$

las componentes siguen la ley de transformación que indica la posición de sus índices (covariante o contravariante).

Tensores de rango arbitrario

Generalizamos la definición del producto tensorial a N espacios vectoriales; a partir de $V^{(1)}, \ldots, V^{(N)}$, formamos el espacio producto, $V = V^{(1)} \otimes \cdots \otimes V^{(N)}$, el cual está formado por $N-$tuplas ordenadas de vectores $|\mathbf{v}^{(1)}\rangle \otimes \cdots \otimes |\mathbf{v}^{(N)}\rangle$.

En particular estamos interesados en el caso en el que p de estos espacios son iguales a V, y q de ellos son iguales a $V^\star$,

$$\overbrace{V \otimes \cdots \otimes V}^{p} \otimes \overbrace{V^\star \otimes \cdots \otimes V^\star}^{q} \ .$$

Componentes covariantes y contravariantes

Un elemento arbitrario de este espacio adopta la forma genérica

$$\mathbf{T} = T^{i_1\ldots i_p}{}_{j_1\ldots j_q}\, |\mathbf{e}_{i_1}\rangle \otimes \cdots \otimes |\mathbf{e}_{i_p}\rangle \otimes \langle \mathbf{e}^{j_1}| \otimes \cdots \otimes \langle \mathbf{e}^{j_q}|\ ,$$

y recibe el nombre de tensor de rango $\binom{p}{q}$ o $(p;q)$.

Los números $T^{i_1\ldots i_p}{}_{j_1\ldots j_q}$ son las componentes de $\mathbf{T}$ en la base canónica.

Bajo un cambio de base, de la forma $|\mathbf{e}_{i'}\rangle = O^i{}_{i'}\,|\mathbf{e}_i\rangle$, estas componentes se transforman de la única manera compatible con la posición de sus índices

$$T^{i'_1\ldots i'_p}{}_{j'_1\ldots j'_q} = O^{i'_1}{}_{i_1}\cdots O^{i'_p}{}_{i_p}\, T^{i_1\ldots i_p}{}_{j_1\ldots j_q}\, O^{j_1}{}_{j'_1}\cdots O^{j_p}{}_{j'_p}\ .$$

Por esta razón, a veces se dice que $\mathbf{T}$ es un tensor p veces contravariante y q veces covariante. Se trata de un abuso de lenguaje: el tensor es invariante. Son sus componentes las que son covariantes o contravariantes.

Igualmente es de tipo $(p;q)$ un tensor de componentes $T^{i_1}{}_{j_1}{}^{i_2\ldots i_p}{}_{j_2\ldots j_q}$, pero es un elemento del espacio $V\otimes V^\star\otimes V\otimes\cdots\otimes V\otimes V^\star\cdots\otimes V^*$.

Algunos ejemplos

La notación $(p; q)$ sólo hace referencia a la cantidad de índices covariantes y contravariantes; debemos tener cuidado con la posición “horizontal” de cada índice, que identifica a un espacio vectorial diferente.

Veamos algunos ejemplos:

- Si $(p; q) = (1; 0)$, recuperamos el propio espacio vectorial V.
- Si $(p; q) = (0; 1)$, tenemos su dual $V^\star$.
- Los dos casos examinados al principio de la clase se corresponden con $(p; q) = (2; 0)$ y $(p; q) = (1; 1)$.
- Por definición, los elementos de Ω son tensores de rango $(p; q) = (0; 0)$ y se denominan escalares; *i.e.*, no se transforman bajo cambios de base.

Los espacios V y $V^\star$ son intercambiables. En este sentido, un vector puede considerarse un funcional lineal sobre elementos de $V^\star$,

$$|\mathbf{v}\rangle : \langle\mathbf{w}| \longrightarrow |\mathbf{v}\rangle(\langle\mathbf{w}|) = \langle\mathbf{w}|\mathbf{v}\rangle \ .$$

Dualidad y el tensor como funcional multilineal

Las componentes en una base se obtienen, análogamente, por evaluación sobre elementos de la base canónica dual

$$v^i = |\mathbf{v}\rangle(\langle\mathbf{e}^i|) = \langle\mathbf{e}^i|\mathbf{v}\rangle \ .$$

Siguiendo con esta manera de interpretar vectores y formas, un tensor de rango $(p; q)$ puede verse como un *funcional multilineal* sobre elementos del espacio dual $V^\star \otimes \cdots \otimes V^\star \otimes V \otimes \cdots \otimes V$.

Es decir, **T** es un *artefacto* que, para producir un número, necesita tener por argumentos p formas y q vectores,

$$\mathbf{T} \ \rightarrow \ \mathbf{T}(\langle\mathbf{w}^1|, \ldots, \langle\mathbf{w}^p|; |\mathbf{v}_1\rangle, \ldots, |\mathbf{v}_q\rangle) \ ,$$

y que es lineal en cada uno de esos argumentos.

En particular, las componentes de dicho tensor no son otras que los números que se obtienen evaluando **T** sobre los elementos de la base

$$T^{i_1\ldots i_p}{}_{j_1\ldots j_q} := \mathbf{T}(\langle\mathbf{e}^{i_1}|, \ldots, \langle\mathbf{e}^{i_p}|; |\mathbf{e}_{j_1}\rangle, \ldots, |\mathbf{e}_{j_p}\rangle)\rangle \ .$$

Dualidad y el tensor como funcional multilineal

Conociendo estos números, la acción de un tensor sobre cualquier conjunto de formas y vectores se obtiene por linealidad

$$\mathbf{T}(\langle \mathbf{w}^1|, \ldots, \langle \mathbf{w}^p|, |\mathbf{v}_1\rangle, \ldots, |\mathbf{v}_q\rangle) = w^1_{i_1} \ldots w^p_{i_p}\; T^{i_1 \ldots i_p}{}_{j_1 \ldots j_q}\; v^{j_1}_1 \ldots v^{j_q}_q \; .$$

Por ejemplo, si $(p; q) = (1; 2)$, el dual de $V \otimes V^\star \otimes V^\star$, cuyos elementos son

$$\mathbf{T} = T^{i_1}{}_{j_1 j_2}\; |\mathbf{e}_{i_1}\rangle \otimes \langle \mathbf{e}^{j_1}| \otimes \langle \mathbf{e}^{j_2}| \; ,$$

es $V^\star \otimes V \otimes V$, cuyos elementos son $(2; 1)$-tensores de la forma

$$\mathbf{S} = S_{k_1}{}^{l_1 l_2}\; \langle \mathbf{e}^{k_1}| \otimes |\mathbf{e}_{l_1}\rangle \otimes |\mathbf{e}_{l_2}\rangle \; .$$

La evaluación de **S** sobre **T**, se efectúa espacio por espacio

$$\langle \mathbf{S}|\mathbf{T}\rangle := \mathbf{S}(\mathbf{T}) = S_{k_1}{}^{l_1 l_2}\; T^{i_1}{}_{j_1 j_2}\; \langle \mathbf{e}^{k_1}|\mathbf{e}_{i_1}\rangle\, \langle \mathbf{e}^{j_1}|\mathbf{e}_{l_1}\rangle\, \langle \mathbf{e}^{j_2}|\mathbf{e}_{l_2}\rangle$$

$$= S_{k_1}{}^{l_1 l_2}\; T^{i_1}{}_{j_1 j_2}\; \delta^{k_1}{}_{i_1}\, \delta^{j_1}{}_{l_1}\, \delta^{j_2}{}_{l_2} = S_{i_1}{}^{j_1 j_2}\; T^{i_1}{}_{j_1 j_2} \; .$$

Operaciones con Tensores

La generalización a $(p; q)$ arbitrarios es inmediata.

Los tensores del mismo rango pueden sumarse y multiplicarse externamente por elementos de un cuerpo. De este modo forman un espacio vectorial que denominamos $\mathcal{T}^p{}_q$.

Podemos definir el producto tensorial: dados dos tensores de rangos $(p_1; q_1)$ y $(p_2; q_2)$, podemos formar con ellos un tensor de rango $(p_1 + p_2; q_1 + q_2)$.

Ya vimos los casos más simples: con los vectores, $|\mathbf{v}\rangle = v^i\,|\mathbf{e}_i\rangle$ y $|\mathbf{w}\rangle = w^j\,|\mathbf{e}_j\rangle$, podemos formar el tensor $\mathbf{T} \in \mathcal{T}^2{}_0$, $\mathbf{T} = |\mathbf{v}\rangle \otimes |\mathbf{w}\rangle$ de componentes $T^{ij} = v^i\, w^j$.

También vimos como formar un $(1; 1)$-tensor a partir de un vector y una forma.

Si $\mathbf{T} \in \mathcal{T}^1{}_2$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{T}^1{}_1$ tienen, respectivamente, componentes $T^{i_1}{}_{j_1 j_2}$ y $S^{i_2}{}_{j_3}$, es posible formar $\mathbf{R} = \mathbf{T} \otimes \mathbf{S} \in \mathcal{T}^2{}_3$, cuyas componentes

$$R^{i_1}{}_{j_1 j_2}{}^{i_2}{}_{j_3} = T^{i_1}{}_{j_1 j_2}\; S^{i_2}{}_{j_3}\ ,$$

son obtenidas por simple multiplicación de las de $\mathbf{T}$ y $\mathbf{S}$.

Contracción

Otra operación que podemos efectuar con un tensor es la contracción, que produce a partir de un tensor de rango $(p; q)$ otro de rango $(p-1; q-1)$.

Por ejemplo, sea $\mathbf{T} \in \mathcal{T}^2{}_3$ de componentes $T^{i_1 i_2}{}_{j_1 j_2 j_3}$. Si igualamos los índices $i_2 = j_3 = k$, resulta $T^{i_1 k}{}_{j_1 j_2 k}$, donde la suma sobre todos los valores de k está sobrentendida: hemos contraído las componentes i_2 y j_3.

Probemos que este tensor es de rango $(1; 2)$:

$$T^{i'_1 k'}{}_{j'_1 j'_2 k'} = O^{i'_1}{}_{i_1}\, O^{k'}{}_{k}\, T^{i_1 k}{}_{j_1 j_2 l}\, O^{j_1}{}_{j'_1}\, O^{j_2}{}_{j'_2}\, O^{l}{}_{k'} = O^{i'_1}{}_{i_1}\, T^{i_1 k}{}_{j_1 j_2 l}\, O^{j_1}{}_{j'_1}\, O^{j_2}{}_{j'_2}\, O^{l}{}_{k'}\, O^{k'}{}_{k}$$

$$= O^{i'_1}{}_{i_1}\, T^{i_1 k}{}_{j_1 j_2 l}\, O^{j_1}{}_{j'_1}\, O^{j_2}{}_{j'_2}\, \delta^{l}{}_{k} = O^{i'_1}{}_{i_1}\, T^{i_1 k}{}_{j_1 j_2 k}\, O^{j_1}{}_{j'_1}\, O^{j_2}{}_{j'_2}\ .$$

Por tanto, a todos los efectos $T^{i_1 k}{}_{j_1 j_2 k}$ se comportan frente a cambios de base como las componentes $S^{i_1}{}_{j_1 j_2}$ de un tensor de rango $(1; 2)$.

Podríamos haber efectuado diferentes contracciones: en un tensor de rango $(p; q)$ hay, por tanto, $p\, q$ contracciones independientes.

Contracciones múltiples y contracción total

Son posibles también las contracciones múltiples. Así, contraemos el tensor obtenido anteriormente y encontramos

$$T^{i_1 i_2}{}_{j_1 j_2 j_3} \;\rightarrow\; S^{i_1}{}_{j_1 j_2} = T^{i_1 k}{}_{j_1 j_2 k} \rightarrow\; R_{j_1} = S^{k}{}_{j_1 k} \in \mathcal{T}^{0}{}_{1} \; .$$

Ya no podemos seguir por falta de índices a los cuales emparejar.

La única manera de conseguir un escalar mediante el proceso de contracción es comenzar con un tensor de rango $(p; p)$.

El resultado, naturalmente, es independiente de la base en la que trabajemos,

$$T^{i_1 \ldots i_p}{}_{j_1 \ldots j_p} \;\rightarrow\; T = T^{i_1 \ldots i_p}{}_{i_1 \ldots i_p} \qquad T^{i'_1 \ldots i'_p}{}_{j'_1 \ldots j'_p} \;\rightarrow\; T' = T^{i'_1 \ldots i'_p}{}_{i'_1 \ldots i'_p} \; ,$$

entonces, $T = T'$.

Esta operación ya la hemos visto: la evaluación de una forma sobre un vector puede entenderse como la contracción de índices del $(1; 1)$-tensor, $\langle \mathbf{w}| \otimes |\mathbf{v}\rangle$, de componentes $w_j\, v^i$ para formar el escalar $\langle \mathbf{w}|\mathbf{v}\rangle = w_i\, v^i$.

Contracción total

De forma más general, podemos entender el proceso de evaluación de un tensor de rango $(p; q)$ sobre su dual de rango $(q; p)$ en dos pasos:

- se realiza el producto tensorial $(p; q) \otimes (q; p) = (p + q; p + q)$,
- se contraen todos los índices.

El hecho de que la contracción elimine una pareja de índices, se debe a que la combinación ${}^{i}{}_{i}$ es invariante frente a cambios de base:

$$ {}^{i'}{}_{i'} = O^{i'}{}_{i}\, O^{j}{}_{i'}\, {}^{i}{}_{j} = \delta^{j}{}_{i}\, {}^{i}{}_{j} = {}^{i}{}_{i} \,. $$

Esto es lo que hace que, no sólo $\langle \mathbf{a} | \mathbf{v} \rangle$ sea invariante, sino que los propios tensores lo sean.

Por ejemplo, encontramos esta combinación de índices en la expansión de un vector en una base $|\mathbf{v}\rangle = v^i\, |\mathbf{e}_i\rangle$, de una forma $\langle \mathbf{a}| = a_i\, \langle \mathbf{e}^i|$, o de un tensor en general, $\mathbf{T} = T^{i_1 \dots i_p}{}_{j_1 \dots j_q}\, |\mathbf{e}_{i_1}\rangle \otimes \cdots \otimes |\mathbf{e}_{i_p}\rangle \otimes \langle \mathbf{e}^{j_1}| \otimes \cdots \otimes \langle \mathbf{e}^{j_q}|$.

Tensor métrico y producto escalar real

Si el cuerpo de V es $\mathbb{R}$, la hermiticidad del producto escalar se reduce a

$$(|\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{u}\rangle) = (|\mathbf{u}\rangle, |\mathbf{v}\rangle) \ ,$$

de modo que éste resulta bilineal y, por tanto, se trata de un elemento de $\mathcal{T}^0_2$.

Sea V sobre $\mathbb{R}$. Un $(0;2)$-tensor $\mathbf{g}$ es un tensor métrico si define un producto escalar real no-degenerado.

En una cierta base $\{|\mathbf{e}_i\rangle\}$ podemos expandirlo como

$$\mathbf{g} = g_{ij}\, \langle \mathbf{e}^i| \otimes \langle \mathbf{e}^j| \qquad \Longleftrightarrow \qquad g_{ij} = \mathbf{g}(|\mathbf{e}_i\rangle, |\mathbf{e}_j\rangle) \ .$$

La única propiedad que debe imponerse a las componentes de $\mathbf{g}$: que formen una matriz simétrica, no-degenerada y definida positiva. Es decir, que $g_{ij} = g_{ji}$ y todos sus autovalores sean estrictamente positivos $\lambda_i > 0$, $\lambda_i = 1, \ldots, d$.

La no-degeneración implica que $\det g_{ij} \neq 0$, lo cual asegura la existencia de la matriz inversa $g^{ij} := (g^{-1})_{ij}$,

$$g^{ik}\, g_{kj} = \delta^i{}_j \ .$$

Subir y bajar índices

El producto escalar establece una aplicación entre V y $V^\star$ que es invertible si aquél es no-degenerado. En lenguaje de componentes, subir y bajar índices.

Si el producto escalar es real y simétrico, $g_{ij} = g_{ji}$, por lo que no necesitamos prestar atención a cuál es el índice de g_{ij} que se contrae:

$$v_i = g_{ji}\, v^j = g_{ij}\, v^j \qquad\qquad v^i = g^{ji}\, v_j = g^{ij}\, v_j \;.$$

Podemos extender este procedimiento a tensores de tipo $(p; q)$; cambiar la posición de uno o más índices y pasar así a un tensor de tipo $(p+n; q-n)$. Por ejemplo:

$$T^{i_1\ldots i_p}{}_{j_1\ldots j_q} = g^{i_p j_{q+1}}\; T^{i_1\ldots i_{p-1}}{}_{j_{q+1} j_1\ldots j_q} = g^{i_p j_{q+1}}\; g^{i_{p-1} j_{q+2}}\; T^{i_1\ldots i_{p-2}}{}_{j_{q+2} j_{q+1} j_1\ldots j_q} = \cdots$$

$$T^{i_1\ldots i_p}{}_{j_1\ldots j_q} = g_{i_{p+1} j_1}\; T^{i_1\ldots i_{p+1}}{}_{j_2\ldots j_q} = g_{i_{p+1} j_1}\; g_{i_{p+2} j_2}\; T^{i_1\ldots i_{p+2}}{}_{j_3\ldots j_q} = \cdots$$

En presencia de un tensor métrico las componentes contravariantes y las covariantes no son independientes: podemos restringirnos a tensores con todos los índices abajo, o arriba, según nos convenga.

Pseudo-métrica

El tensor métrico $\mathbf{g} \in \mathcal{T}^0_2$, debe ser definido positivo para representar un producto escalar. Si prescindimos de esta propiedad, hablaremos de una pseudo-métrica o producto pseudo-escalar. En este caso, g_{ij} puede tener autovalores positivos y negativos, pero no nulos.

La base que diagonaliza esta matriz se denomina pseudo-ortogonal,

$$g_{ij} = \mathbf{g}\left(|\mathbf{f}_i\rangle, |\mathbf{f}_j\rangle\right) = \lambda_i \, \delta_{ij} \qquad \lambda_i \neq 0 \; .$$

Podemos hacer una transformación de *escala* $|\mathbf{e}_i\rangle := \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}} |\mathbf{f}_i\rangle$ tal que

$$\eta_{ij}^{(p,q)} := \mathbf{g}\left(|\mathbf{e}_i\rangle, |\mathbf{e}_j\rangle\right) = \mathrm{diag}\,(\underbrace{-1, \ldots, -1}_{p}, \underbrace{+1, \ldots, +1}_{q}) \; ,$$

las nuevas componentes definen la métrica en su *forma canónica*.

Los distintos tensores (pseudo-)métricos vienen clasificados por la signatura (p, q); *i.e.*, el número de signos negativos y positivos de su forma canónica.

Ejemplos

Espacio Euclídeo $[(p, q) = (0, N)]$

La base $|\mathbf{e}_i\rangle$ que diagonaliza la métrica se denomina base cartesiana,

$$\mathbf{g}_E\left(|\mathbf{e}_i\rangle, |\mathbf{e}_j\rangle\right) = \delta_{ij} \qquad \Longrightarrow \qquad v_i = v^j\,\delta_{ij} = v^i\ .$$

El producto cartesiano de dos vectores es el producto escalar en esta base

$$\mathbf{g}_E\left(|\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{w}\rangle\right) = \delta_{ij}\, v^i\, w^j = \sum_{i=1}^{N} v^i\, w^i\ .$$

$g_{ij} = \delta_{ij}$: subir y bajar índices no altera el valor numérico de las componentes.

Espacio de Minkowski $[(p, q) = (1, 3)]$

Es el espacio $\mathbb{R}^4$ con la métrica de Minkowski, $\eta^{(1,3)}_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(-1, 1, 1, 1)$. Se usan índices griegos $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ para denotar las componentes.

Los *cuadrivectores*, $v^\mu = (v^0, v^1, v^2, v^3)$, y las componentes v_μ de sus formas duales resultan, sencillamente, $v_0 = -v^0$ y $v_i = v^i$, $i = 1, 2, 3$.

Tensores simétricos

El producto de Minkowski de dos cuadrivectores resulta:

$$\mathbf{g}_M\left(|\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{w}\rangle\right) = v_\mu\, w^\mu = \eta^{(1,3)}_{\mu\nu}\, v^\nu\, w^\mu = -v^0\, w^0 + \sum_{i=1}^{3} v^i\, w^i \ .$$

En rigor, éste no es un producto escalar. El subespacio vectorial formado por las componentes con índices latinos es euclídeo.

Sea el $(0;3)$-tensor de componentes T_{ijk}. Decimos que es simétrico en el par de índices i, j si sus componentes, en cualquier base, son invariantes frente a la permutación de los mismos

$$T_{ijk} = T_{jik} \ .$$

Esta simetría puede definirse en forma intrínseca, exigiendo que

$$\forall\, |\mathbf{u}\rangle, |\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{w}\rangle \in V \qquad \longrightarrow \qquad \mathbf{T}\left(|\mathbf{u}\rangle, |\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{w}\rangle\right) = \mathbf{T}\left(|\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{u}\rangle, |\mathbf{w}\rangle\right) \ .$$

Por linealidad, esta condición equivale a la anterior: la propiedad de simetría se expresa de igual forma en cualquier base.

Tensores simétricos y antisimétricos

La simetría se puede definir con respecto a cualquier par e incluso para un conjunto más grande de índices. El tensor anterior es totalmente simétrico si

$$T_{ijk} = T_{\pi(ijk)} \ ,$$

donde $\pi(ijk)$ es una permutación arbitraria de los índices.

Igualmente, podemos definir tensores parcial o totalmente antisimétricos.

Un $(0; q)$-tensor es antisimétrico en, por ejemplo, los primeros p índices si, para cualquier conjunto de q vectores $|\mathbf{u}_1\rangle, \ldots, |\mathbf{u}_q\rangle$, verifica que

$$\mathbf{T}\left(|\mathbf{u}_1\rangle, \ldots, |\mathbf{u}_p\rangle, |\mathbf{u}_{p+1}\rangle, \ldots, |\mathbf{u}_q\rangle\right)$$

$$= (-1)^{|\pi|}\, \mathbf{T}\left(|\mathbf{u}_{\pi(1)}\rangle, \ldots, |\mathbf{u}_{\pi(p)}\rangle, |\mathbf{u}_{p+1}\rangle, \ldots, |\mathbf{u}_q\rangle\right) .$$

$|\pi|$ es el orden de la permutación: equivale al número de permutaciones elementales que la componen (sólo depende de si éste es par o impar).

Simetrizador y antisimetrizador

A partir de un $(0; q)$-tensor podemos obtener otros dos que sean totalmente simétricos o antisimétricos.

La operación de simetrizar un conjunto de índices se expresa encerrando dichos índices entre paréntesis, $T_{i_1 \dots i_q} \to T_{(i_1 \dots i_q)}$,

$$T_{(i_1 \dots i_q)} := \frac{1}{q!} \sum_{\pi \in S_q} T_{i_{\pi(1)} \dots i_{\pi(q)}} \; .$$

Los índices simetrizados pueden ser también un subconjunto del total.

La operación de antisimetrización se simboliza encerrando el conjunto de índices involucrados entre corchetes $T_{i_1 \dots i_q} \to T_{[i_1 \dots i_q]}$, donde

$$T_{[i_1 \dots i_q]} := \frac{1}{q!} \sum_{\pi \in S_q} (-1)^{|\pi|} \, T_{i_{\pi(1)} \dots i_{\pi(q)}} \; .$$

Se sugiere, como ejercicio, demostrar explícitamente que bajo un cambio de base se mantienen las propiedades de simetría de las componentes T_{ijk}.

El símbolo alternante $\epsilon_{i_1 \dots i_d}$

En *cualquier base* de V definimos el símbolo alternante, $\epsilon_{i_1 \dots i_d} = \epsilon^{i_1 \cdots i_d}$, con la condición de que sea totalmente antisimétrico y $\epsilon_{123\dots d} = 1$.

En rigor, el símbolo alternante no es un tensor. En d dimensiones, un tensor totalmente antisimétrico de d índices tiene una componente independiente,

$$A_{123\dots d} = a \quad a \in \mathbb{R} \qquad \Longrightarrow \qquad A_{i_1 \cdots i_d} = a\, \epsilon_{i_1 \dots i_d} \ ,$$

dado que dicho tensor es antisimétrico en cualquier base. Los cambios de base sólo se reflejan en cambios en el valor de a.

El símbolo alternante coincide con las componentes del tensor totalmente antisimétrico **A** en alguna base, pero no en cualquiera: ϵ no es un tensor.

Mediante el símbolo alternante se definen diversos objetos de interés. Uno de ellos es el determinante. Sea Λ una *aplicación lineal* que, en una cierta base, tiene por componentes $\Lambda^i{}_j$. Definimos el determinante como

$$\det \Lambda := \Lambda^1{}_{i_1} \dots \Lambda^d{}_{i_d}\, \epsilon^{i_1 \cdots i_d} = \ \epsilon_{i_1 \dots i_d}\, \Lambda^{i_1}{}_1 \dots \Lambda^{i_d}{}_d \ .$$

El antisimetrizador y el símbolo alternante

El antisimetrizador efectúa una suma de todas las componentes con índices permutados, ponderada por la signatura de la permutación.

Para un tensor de rango maximal, $q = d$, el mismo resultado se obtiene de una contracción con el símbolo alternante,

$$T_{[i_1 \ldots i_d]} = \frac{1}{d!} T_{i_1 \ldots i_d} \, \epsilon^{i_1 \ldots i_d} \ .$$

Esta suma sólo contiene $d!$ términos no nulos y los índices adquieren todas las permutaciones de los valores $1, \ldots, d$.

El signo proviene del valor de la componente del símbolo alternante.

Esto resulta útil para mostrar una tercera expresión para el determinante ya que, es muy fácil convencerse, $\det \Lambda$ es una expresión antisimétrica en los índices *externos*. Por tanto, podemos escribir

$$\det \Lambda = \frac{1}{d!} \, \epsilon_{i_1 \ldots i_d} \, \Lambda^{i_1}{}_{j_1} \cdots \Lambda^{i_d}{}_{j_d} \, \epsilon^{j_1 \ldots j_d} \ .$$

Elemento de volumen

Sea un conjunto de d vectores, $X_d := \{|\mathbf{v}_a\rangle\} \in V_d$, linealmente independientes, y v_a^i sus componentes en una cierta base $|\mathbf{e}_i\rangle$. Se denomina a $V(X_d)$,

$$V(X_d) := V(|\mathbf{v}_1\rangle, \ldots, |\mathbf{v}_d\rangle) = \epsilon_{i_1 \ldots i_d}\, v_1^{i_1} \cdots v_d^{i_d} \ ,$$

volumen subtendido por dichos vectores. El volumen de la base canónica es

$$V(|\mathbf{e}_1\rangle, \ldots, |\mathbf{e}_d\rangle) = \epsilon_{i_1 \ldots i_d}\, \delta_1^{i_1} \cdots \delta_d^{i_d} = \epsilon_{1 \ldots d} = 1 \ .$$

Sea Λ un operador lineal que aplica $\Lambda : |\mathbf{v}_a\rangle \to |\mathbf{v}'_a\rangle$, con componentes v'^i_a,

$$v'^i_a = \Lambda^i{}_j\, v_a^j \ ,$$

en la misma base $|\mathbf{e}_i\rangle$. Entonces, el nuevo volumen resulta:

$$V(X'_d) = \epsilon_{i_1 \ldots i_d}\, v'^{i_1}_1 \cdots v'^{i_d}_d = \epsilon_{i_1 \ldots i_d}\, \Lambda^{i_1}{}_{j_1}\, v_1^{j_1} \cdots \Lambda^{i_d}{}_{j_d}\, v_d^{j_d}$$

$$= \epsilon_{i_1 \ldots i_d}\, \Lambda^{i_1}{}_{j_1} \cdots \Lambda^{i_d}{}_{j_d}\, v_1^{j_1} \cdots v_d^{j_d} = (\det \Lambda)\, \epsilon_{j_1 \ldots j_d}\, v_1^{j_1} \cdots v_d^{j_d} = (\det \Lambda)\ V(X_d) \ ,$$

$\det \Lambda$ es el cociente de los volúmenes antes y después de la transformación.

Densidades tensoriales

Si $\det \Lambda = 0$, entonces $V(X'_d) = 0$, señal de que dicho conjunto de vectores no es linealmente independiente.

Las transformaciones especiales ($SL(n, \mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{R})$) son aquellas que mantienen invariante el volumen: $\Lambda \in SL(n, \mathbb{R})$ si $\det(\Lambda^i{}_j) = 1$.

Dijimos antes que $\epsilon_{i_1 \dots i_d}$ no es un tensor. Si lo fuera,

$$\epsilon_{i'_1 \dots i'_d} = \Lambda^{i_1}{}_{i'_1} \dots \Lambda^{i_d}{}_{i'_d} \, \epsilon_{i_1 \dots i_d} \,,$$

por lo que, contrayendo todos los índices con $\epsilon^{j'_1 \dots j'_d}$,

$$d! = \epsilon^{i'_1 \dots i'_d} \, \epsilon_{i'_1 \dots i'_d} = \epsilon^{i'_1 \dots i'_d} \, \Lambda^{i_1}{}_{i'_1} \dots \Lambda^{i_d}{}_{i'_d} \, \epsilon_{i_1 \dots i_d} = (\det \Lambda) \, d! \,.$$

Si $\det \Lambda \neq 1$, llegamos a una contradicción.

Si insistimos en que $\epsilon_{i_1 \dots i_d} = \epsilon_{i'_1 \dots i'_d} = \epsilon^{i_1 \dots i_d} = \epsilon^{i'_1 \dots i'_d} = \{\pm 1, 0\}$, *en cualquier base*, de modo que la fórmula del determinante siga valiendo, deberíamos modificar la regla de transformación:

$$\epsilon_{i'_1 \dots i'_d} := (\det \Lambda^j{}_{j'})^{-1} \, \Lambda^{i_1}{}_{i'_1} \cdots \Lambda^{i_d}{}_{i'_d} \, \epsilon_{i_1 \dots i_d} \,.$$

Densidades tensoriales

Análogamente,

$$\epsilon^{i'_1\cdots i'_d} := (\det \Lambda^{j}{}_{j'})\, \Lambda^{i'_1}{}_{i_1} \cdots \Lambda^{i'_d}{}_{i_d}\; \epsilon^{i_1\cdots i_d}\ .$$

Definimos densidad tensorial de peso h y rango $(p;q)$, $\Omega^{h_1}_{(p_1;q_1)}$, a objetos con p índices contravariantes y q covariantes que transforman según

$$T^{i'_1\cdots i'_p}{}_{j'_1\ldots j'_q} = (\det \Lambda^{j}{}_{j'})^{h}\, \Lambda^{i'_1}{}_{i_1} \cdots \Lambda^{i'_p}{}_{i_p}\; T^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\ldots j_q}\; \Lambda^{j_1}{}_{j'_1} \cdots \Lambda^{j_p}{}_{j'_p}$$

bajo cambios de base $|\mathbf{e}_i\rangle \to |\mathbf{e}_{i'}\rangle = \Lambda^{i}{}_{i'}\, |\mathbf{e}_i\rangle$.

De este modo, el símbolo alternante resulta una densidad tensorial de peso ± 1 (según su carácter contravariante o covariante).

- Las densidades tensoriales de peso h y rango $(p;q)$ forman un espacio vectorial. Por lo tanto, se pueden sumar y multiplicar por escalares.
- Los tensores *son* densidades tensoriales de peso $h = 0$.
- Dos densidades tensoriales, $\Omega^{h_1}_{(p_1;q_1)}$ y $\Omega^{h_2}_{(p_2;q_2)}$ pueden multiplicarse para dar lugar a $\Omega^{h_1+h_2}_{(p_1+p_2;q_1+q_2)}$.

Tensor de Levi-Civita

El determinante de un tensor de rango $(1;1)$ es invariante. No así el de uno de rango $(2;0)$ ó $(0;2)$. Por ejemplo, definiendo

$$\det g_{ij} = g_{1i_1} \cdots g_{di_d} \, \epsilon^{i_1 \dots i_d} \ ,$$

bajo un cambio de base $|\mathbf{e}_i\rangle \to |\mathbf{e}_{i'}\rangle = \Lambda^i{}_{i'} \, |\mathbf{e}_i\rangle$,

$$\det g_{i'j'} = \det(\Lambda^i{}_{i'} \, g_{ij} \, \Lambda^j{}_{j'}) = \det \Lambda^i{}_{i'} \, \det g_{ij} \, \det \Lambda^j{}_{j'} = (\det \Lambda^i{}_{i'})^2 \, \det g_{ij} \ .$$

En definitiva, $\det g_{ij}$ es una densidad escalar de peso 2.

Entonces, podemos definir un tensor (covariante) totalmente antisimétrico a partir del símbolo alternante o de Levi-Civita:

$$w_{i_1 \dots i_d} := \sqrt{g} \, \epsilon_{i_1 \dots i_d} \qquad\qquad g = |\det g_{ij}| \ ,$$

$$\Longrightarrow \quad w'_{i'_1 \dots i'_d} = \sqrt{g'} \, \epsilon'_{i'_1 \dots i'_d} = \det \Lambda \, \sqrt{g} \, (\det \Lambda)^{-1} \, \Lambda^{i_1}{}_{i'_1} \cdots \Lambda^{i_d}{}_{i'_d} \, \epsilon_{i_1 \dots i_d}$$

$$= \Lambda^{i_1}{}_{i'_1} \cdots \Lambda^{i_d}{}_{i'_d} \, w_{i_1 \dots i_d} \ .$$

Elemento de volumen

El tensor de Levi-Civita contravariante se obtiene subiendo los índices,

$$w^{i_1\ldots i_d} = g^{i_1j_1}\cdots g^{i_dj_d}\; w_{j_1\ldots j_d} \qquad w_{i_1\ldots i_d} = g_{i_1j_1}\cdots g_{i_dj_d}\; w^{j_1\ldots j_d}\ .$$

con el tensor métrico. Podemos verificar que

$$w^{i_1\ldots i_d} = g^{i_1j_1}\cdots g^{i_dj_d}\,\sqrt{g}\;\epsilon_{j_1\ldots j_d} = \sqrt{g}\;\det g^{ij}\;\epsilon^{i_1\ldots i_d} = \frac{s}{\sqrt{g}}\epsilon^{i_1\ldots i_d}\ ,$$

donde $s = \mathrm{signo}(g) = \frac{|g|}{g} = \pm 1$ es la signatura del tensor métrico.

Volviendo a los dos espacios métricos que vimos anteriormente:

- Espacio Euclídeo E^n: $g = s = 1$, así que

$$w_{i_1\ldots i_n} = \epsilon_{i_1\ldots i_n} \qquad w^{i_1\ldots i_n} = \epsilon^{i_1\ldots i_n}\ .$$

- Espacio de Minkowski M^n: $s = -1 = -g$, con lo cual

$$w_{i_1\ldots.i_n} = \epsilon_{i_1\ldots i_n} \qquad w^{i_1\ldots i_n} = -\epsilon^{i_1\ldots i_n}\ .$$