Tema 5: Elementos de geometría diferencial

José D. Edelstein

Universidade de Santiago de Compostela

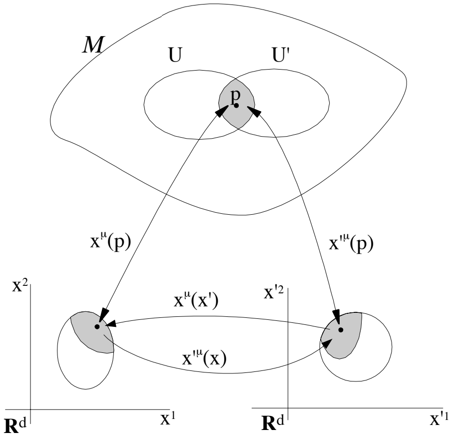
FÍSICA MATEMÁTICA

Santiago de Compostela, abril de 2011

Coordenadas locales y atlas. Funciones y curvas. Espacios tangente y cotangente. Flujos y derivadas de Lie.

Sistemas generales de coordenadas

Sea una variedad diferencial M de dimensión d. En general puede definirse un sistema local de coordenadas (un *atlas*), $\{O_\alpha, x^i_\alpha\}_{\alpha=1,\ldots,N}$.



En la intersección $O_\alpha \cap O_\beta$ tenemos las funciones de transición $x^i_\beta = x^i_\beta(x_\alpha)$.

Cambio de coordenadas y curvas

Dos sistemas de coordenadas $\{x^i\}$ y $\{x'^i\}$ se relacionan a través de un conjunto de d funciones

$$x'^i = f^i(x) \qquad\qquad i = 1, \ldots, D \,.$$

El Jacobiano no debe anularse (condición necesaria y suficiente)

$$J = \left|\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right| = \left|\frac{\partial f^i(x)}{\partial x^j}\right| \neq 0 \,,$$

para que el cambio de coordenadas sea invertible, $g := f^{-1}$,

$$x^i = g^i(x') \qquad\qquad i = 1, \ldots, d \,.$$

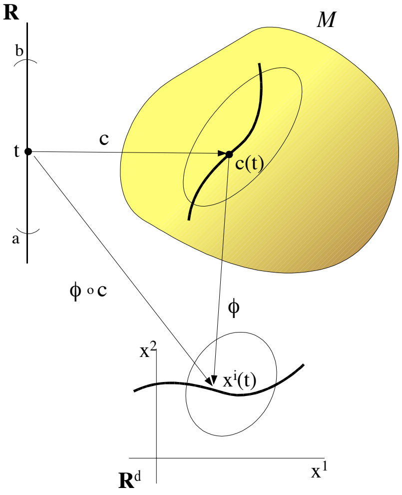
Un cambio de coordenadas es un difeomorfismo, $\vec{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$.

Localmente, M es isomorfa a $\mathbb{R}^d$. Ello permite utilizar el cálculo diferencial en el entorno infinitesimal de un punto arbitrario.

Una curva es una aplicación $c : \mathbb{R} \to M$, $t \to p = c(t)$.

Curvas

Usando coordenadas $t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ y $x^i \in O$, para un abierto $O \subset M$, la curva viene dada por el conjunto de funciones coordenadas $\phi \circ c : t \rightarrow x^i(t)$.



Curvas coordenadas y funciones

Las curvas que mantienen todas las coordenadas constantes menos una se denominan curvas coordenadas.

E.g., la curva coordenada asociada a x^1 viene dada por

$$t \to (x^1(t) = t, x^2, \ldots, x^d) \ ,$$

y así sucesivamente para $x^2(t)$, etcétera.

Una función real, $\varphi \in \mathcal{F}(M)$ es una aplicación $\varphi : M \to \mathbb{R}$, $p \to \varphi(p)$.

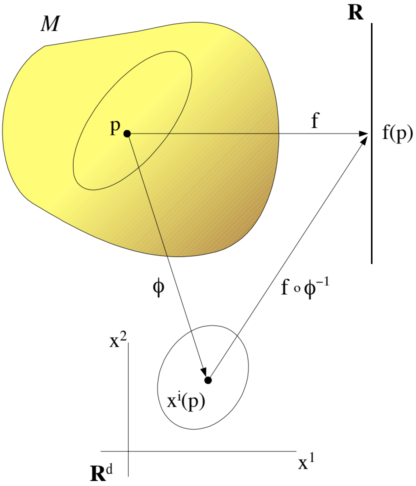
Sean $x^i = \phi^i(p)$ coordenadas de un abierto $O \subset M$; la función sobre M viene especificada por $x^i \to \varphi \circ \phi^{-1}(x^i)$.

Dado un punto p perteneciente a una carta, (O, ϕ), el mapa coordenado $\phi = \phi^i : p \to x^i = \phi^i(p) = \phi^i \circ \phi^{-1}(x)$ es una función real que se denomina función coordenada.

Podemos restringir una función a una curva sobre la variedad diferencial M. Una curva c es una subvariedad de M.

Funciones sobre curvas

La restricción de φ a c es una función $\varphi \circ c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R} \to \varphi \circ c(t)$.



La función puede escribirse también como $\Phi(x^i(t))$ con $\Phi := \varphi \circ \phi^{-1}$.

Vectores tangentes

Un vector es un operador asociado a una curva $c(t)$ en un punto $p = c(t_0)$.

Evalúa el cambio de funciones definidas sobre dicha curva en p, $\frac{d\Phi}{dt}\Big|_{t=t_0}$.

Pero Φ es función de t a través de las coordenadas de la curva $x^i(t)$:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{dx^i(t)}{dt}\,\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x^i}\ .$$

Como Φ puede ser cualquier función, escribimos la identidad operatorial

$$|\mathbf{v}\rangle := \frac{d}{dt} = \frac{dx^i(t)}{dt}\,\frac{\partial}{\partial x^i} = v^i\,\partial_i \qquad v^i = v^i(x(t)) = \frac{dx^i(t)}{dt}\ .$$

Se dice que $\vec{v}$ es un vector tangente a la curva y v^i sus componentes.

La variación de una función a lo largo de la curva viene dada, así, por la acción del vector tangente $\Phi \to |\mathbf{v}\rangle[\Phi]$.

Los vectores tangentes a las curvas coordenadas son precisamente las derivadas parciales $|\mathbf{e}_i\rangle = \partial_i \quad \Longleftrightarrow \quad |\mathbf{v}\rangle = v^i\,|\mathbf{e}_i\rangle$.

Cambio de base

Los $|\mathbf{e}_i\rangle = \partial_i$ forman una base del espacio de vectores tangentes a M en el punto p, $\mathcal{T}_p(M)$. Cualquier variación es una combinación lineal de variaciones a lo largo de las curvas coordenadas.

En la intersección de dos abiertos $O \cup O'$, hay dos sistemas de coordenadas x^i y $x^{i'}$. Las bases tangentes asociadas son $|\mathbf{e}_i\rangle = \partial_i$ y $|\mathbf{e}_{i'}\rangle = \partial_{i'}$.

Una función $\phi(p)$ en $O \cup O'$ admite una representación en cada sistema de coordenadas,

$$\Phi'(x') = \Phi(x(x')) \, .$$

La acción de $|\mathbf{e}_{i'}\rangle$ ($|\mathbf{e}_i\rangle$) sólo puede hacerse sobre la izquierda (derecha). Mediante la regla de la cadena:

$$|\mathbf{e}_{i'}\rangle[\Phi'] = \frac{\partial \Phi'(x')}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial \Phi(x(x'))}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x^i} = \Lambda^i{}_{i'} |\mathbf{e}_i\rangle[\Phi] \, .$$

Como Φ es arbitraria, la matriz que define el cambio de base coordenada en el espacio tangente, $\partial_{i'} = \Lambda^i{}_{i'} \, \partial_i$ es $\Lambda^i{}_{i'} = \dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$ (el Jacobiano).

Campo vectorial

La invariancia de $|\mathbf{v}\rangle = v^i\,\partial_i = v^{i'}\,\partial_{i'}$ implica la regla de transformación contravariante para las componentes $v^{i'} = \Lambda^{i'}{}_i\, v^i$, donde las matrices $\Lambda^{i'}{}_i$ y $\Lambda^i{}_{i'}$ son, consistentemente, inversas la una de la otra

$$\Lambda^i{}_{i'}\,\Lambda^{i'}{}_j = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\,\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i{}_j\ .$$

El espacio tangente, $\mathcal{T}_p(M)$, es una noción ligada a p. Tiene dimensión finita, igual a la de M. Un campo vectorial es una elección de un elemento de cada espacio tagente, de manera que el resultado sea continuo y diferenciable.

Basta con pedir que las v^i que especifican un vector en cada punto sean funciones continuas y diferenciables de las coordenadas x^i en $O \subset M$,

$$|\mathbf{v}\rangle = v^i(x)\,\partial_i \qquad\qquad x^i = x^i(p) \qquad \forall\, p \in O\ .$$

El cambio de coordenadas $x^i \to x^{i'}(x)$ afecta también al argumento de v^i

$$v^{i'}(x'(x)) = \Lambda^{i'}{}_i(x)\,v^i(x)\ .$$

El espacio $\mathcal{T}(M)$ tiene dimensión infinita, puesto que las componentes de un campo vectorial son funciones $v^i(x) \in \mathcal{F}(M)$.

Co-vectores tangentes

Al espacio vectorial $\mathcal{T}_p(M)$ le está asociado, de forma natural, un espacio dual, $\mathcal{T}_p^\star(M)$, de 1-formas lineales sobre $\mathcal{T}_p(M)$, $\langle \mathbf{w}| : \mathcal{T}_p(M) \to \mathbb{R}$,

$$\langle \mathbf{w}| : |\mathbf{v}\rangle \to \langle \mathbf{w}|\mathbf{v}\rangle = a\ .$$

La base canónica dual, $\langle \mathbf{e}^i|$, verifica

$$\langle \mathbf{e}^i|\mathbf{e}_j\rangle = \delta^i{}_j\ .$$

En el caso de $\mathcal{T}(M)$ en un abierto O, contamos con la base coordenada $|\mathbf{e}_i\rangle = \partial_i$. La base canónica dual la denominamos $\langle \mathbf{e}^i| = \langle dx^i|$,

$$\langle dx^i|\partial_j\rangle = \delta^i{}_j\ .$$

Un co-vector tangente se expande en una base coordenada $\langle \mathbf{w}| = w_i\, \langle dx^i|$; el producto dual viene dado por la contracción natural de componentes,

$$a = \langle \mathbf{w}|\mathbf{v}\rangle = w_i\, v^j\, \langle dx^i|\partial_j\rangle = w_i\, v^j\, \delta^i{}_j = w_i\, v^i\ .$$

Al igual que los campos vectoriales, la extensión de w_i a funciones $w_i(x)$ en M permite definir un campo de 1-formas, $\mathbf{w} = w_i(x)\, dx^i \in \mathcal{T}^\star(M)$.

El gradiente

Sea un campo vectorial, $|\mathbf{v}\rangle \in \mathcal{T}(M)$; en $p \in M$ hay dos maneras de producir un número:

- Hacer actuar $|\mathbf{v}\rangle$ sobre una función, $f \in \mathcal{F}(M)$ para obtener $|\mathbf{v}\rangle[f]$, su variación a lo largo de la curva a la que $|\mathbf{v}\rangle$ es tangente en ese punto.
- Escoger un elemento $\langle \mathbf{w}| \in \mathcal{T}^\star(M)$ y efectuar la contracción $\langle \mathbf{w}|\mathbf{v}\rangle$.

Definimos la 1-forma gradiente de f, $\langle df|$, como aquella que verifica

$$\langle df|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{v}\rangle[f] \qquad\qquad \forall\, |\mathbf{v}\rangle \in \mathcal{T}(M)\,.$$

En un sistema de coordenadas, podemos expandir $\langle df| := \partial_i f(x)\,\langle dx^i|$ y $|\mathbf{v}\rangle = v^j(x)\,\partial_j$ y encontramos coincidencia

$$\langle df|\mathbf{v}\rangle = \partial_i f(x)\, v^i = (v^i\,\partial_i) f(x) = |\mathbf{v}\rangle[f]\,.$$

En particular, los propios elementos de la base co-tangente, $\langle dx^i|$, son las 1-formas gradiente de las funciones coordenadas $f(p) = x^i(p)$.

Tensores de rango (p, q)

Dadas las coordenadas $\{x^i\}$ en un abierto, la base coordenada $\{\partial_i\}$ es un conjunto de elementos de $\mathcal{T}_p(M)$, $\forall\, p \in M$.

Una combinación lineal dependiente del punto, en la forma $\mathbf{v} = v^i(x)\,\partial_i$ será un campo vectorial si y sólo si $v^i(x)$ son $\mathcal{C}^\infty$.

De forma general, un sistema de coordenadas define una base de dimensión d^{p+q} para el espacio de campos tensoriales $\mathcal{T}(M)^p{}_q$, cuya base es

$$\partial_{i_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_q} \ ,$$

en cada $p \in M$. Un campo tensorial, entonces, involucra las correspondientes funciones componentes, $T^{i_1 \dots i_p}{}_{j_1 \dots j_q}(x)$,

$$\mathbf{T} \;=\; T^{i_1 \dots i_p}{}_{j_1 \dots j_q}(x)\; \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q}$$

Sus propiedades de transformación ante cambios de coordenadas locales,[1]

$$T^{i'_1 \dots i'_p}{}_{j'_1 \dots j'_q}(x'(x)) \;=\; \Lambda^{i'_1}{}_{i_1}(x) \cdots \Lambda^{i'_p}{}_{i_p}(x)\; T^{i_1 \dots i_p}{}_{j_1 \dots j_q}(x)\; \Lambda^{j_1}{}_{j'_1}(x) \cdots \Lambda^{j_p}{}_{j'_p}(x)\ .$$

[1] Ante transformaciones restringidas, hablaremos de tensores de rotaciones, Galileanos, etc.

Curva integral y flujos

Sea $\mathbf{v}$ un campo vectorial sobre M. $x^i(t)$ será una curva integral de $\mathbf{v}$ si en todo punto de la misma, el vector tangente y el del campo coinciden.

En una base coordenada, $\mathbf{v} = v^i(x)\,\partial_i$. Entonces, $x^i(t)$ será curva integral si se cumple la ecuación diferencial de ordinaria

$$\dot{x}^i(t) := \frac{dx^i(t)}{dt} = v^i(x(t)) \; ,$$

ya que el vector tangente a la curva es $\frac{d}{dt} = \dot{x}^i(t)\,\partial_i$.

Dada una condición inicial, $x^i(0) = x_0^i$, la teoría general de EDOs asegura la existencia y unicidad de la solución en un entorno de x_0^i.

Dado un campo vectorial $\mathbf{v} \in \mathcal{T}(M)$, el flujo asociado es la congruencia de curvas integrales del campo. Su forma coordenada es una aplicación σ,

$$\sigma : \mathbb{R} \times M \to M \qquad\qquad (t, x_0) \to \sigma^i(t, x_0)$$

tal que, $\forall\, x_0$, $\sigma^i(t, x_0)$ son las coordenadas de una curva integral que pasa por x_0, $\frac{d\sigma^i(t,x_0)}{dt} = v^i(t, x_0)$.

Mapa exponencial

Dado $\mathbf{v} \in \mathcal{T}(M)$, ¿cómo reconstruir el flujo asociado $\sigma^i(t,x)$?

Para cualquier curva $x^i(t)$, expandimos en serie de Taylor una función sobre la curva $f(t) := f(x^i(t))$ en una vecindad de t_0,

$$f(t) = f(t_0) + t\, \frac{df(t)}{dt}\bigg|_{t_0} + \frac{t^2}{2}\, \frac{d^2 f(t)}{dt^2}\bigg|_{t_0} + \ldots .$$

Si $x^i(t)$ es una curva integral, entonces,

$$\frac{df(t)}{dt}\bigg|_{t_0} = \frac{dx^i(t)}{dt}\bigg|_{t_0} \frac{\partial f(x)}{\partial x^i}\bigg|_{x=x(t_0)} = \mathbf{v}[f]\Big|_{x(t_0)} ,$$

y podemos rescribir la serie de Taylor formalmente como

$$f(t) = \left(1 + t\,\mathbf{v} + \frac{t^2}{2}\,\mathbf{v}^2 + \frac{t^3}{3!}\,\mathbf{v}^3 + \cdots\right) f(x)\bigg|_{x=x(t_0)} = e^{t\,\mathbf{v}}\, f(x)\Big|_{x=x(t_0)} .$$

Un caso particular se obtiene para las funciones coordenada $f(x) = x^i$.

Entonces, dada la condición inicial $f(t_0) = x^i(t_0) = x_0^i$, la expansión anterior reconstruye la curva del flujo que pasa por este punto,

$$x^i(t) = \sigma^i(t, x_0) = e^{t\,\mathbf{v}}\, x^i \Big|_{x=x_0} \, .$$

Definamos $\sigma_t := \sigma(t, \cdot)$ a t fijo,

$$\sigma_t : M \to M \qquad\qquad x^i \to {\sigma_t}^i(x) = \sigma^i(t, x) \, .$$

σ_t es un difeomorfismo activo de M que mueve x^i a otro punto, $x'^i = {\sigma_t}^i(x)$, una *distancia* t a lo largo del flujo integral del campo $\mathbf{v}$.

Si consideramos ahora $t \in \mathbb{R}$, el conjunto de todos los σ_t cumple:

$$\text{(i)} \quad \sigma_t \cdot \sigma_s = \sigma_{t+s} \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \sigma_0 = \mathbb{I} \qquad\qquad \text{(iii)} \quad \sigma_{-t} = {\sigma_t}^{-1} \, .$$

Es un grupo conmutativo, isomorfo (localmente) al grupo aditivo $\mathbb{R}$.

El difeomorfismo σ_t, asociado a $\mathbf{v}$, *mueve* todos los objetos geométricos que podemos definir sobre M: arrastre de Lie.

Arrastre de Lie de funciones y campos vectoriales

El arrastre de Lie de una función actúa sólo sobre el argumento. El valor de la nueva función en x coincide con el de la antigua en la preimagen de x,

$$\begin{aligned} \sigma_t : \mathcal{F}(M) &\rightarrow \mathcal{F}(M) \\ \phi(x) &\rightarrow \phi'(x) := (\sigma_t\, \phi)(x) = \phi({\sigma_t}^{-1}(x)) \,, \end{aligned}$$

que podemos escribir, equivalentemente,

$$(\sigma_t\, \phi)(\sigma_t(x)) = \phi(x) \,.$$

Sea un campo vectorial $\mathbf{w} = w^i(x)\,\partial_i$. El arrastre de Lie de $\mathbf{w}$ a lo largo de $\mathbf{v}$, se denota $\sigma_{t\star}\mathbf{w}$, y define un nuevo campo vectorial dado por la expresión

$$w'^i(x) := (\sigma_{t\star}\mathbf{w})^i(x) = \frac{\partial\sigma^i(t,x)}{\partial x^j}\, w^j({\sigma_t}^{-1}(x)) \,,$$

ya que

$$x'^i = \sigma^i(t,x) \qquad \Longrightarrow \qquad \Lambda^i{}_j(x) = \frac{\partial\sigma^i(t,x)}{\partial x^j} \,.$$

Derivada de Lie

Sea $t = \epsilon \ll 1$. El difeomorfismo infinitesimal dado por el arrastre de Lie es

$$x^i \to x'^i = \sigma^i_\epsilon(x) = \sigma^i(\epsilon, x) = \sigma^i(0, x) + \epsilon \left.\frac{d\sigma^i(t,x)}{dt}\right|_{t=0} + \dots$$
$$= x^i + \epsilon\, v^i(x) + \dots$$

El $\sigma_\epsilon(x)$ asociado a $\mathbf{v}$, es una traslación de x^i en una cantidad $\epsilon\, v^i(x)$.

La derivada de Lie de una función con respecto a $\mathbf{v}$ se define a través de

$$\mathcal{L}_\mathbf{v}(\varphi) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\varphi - (\sigma_\epsilon\, \varphi)\right) .$$

Haciendo uso de la expresión obtenida antes para $\sigma_\epsilon\, \phi$,

$$\mathcal{L}_\mathbf{v}(\varphi) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\varphi(x) - \varphi(\sigma_\epsilon^{-1}(x)\right) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\varphi(x) - \varphi(x - \epsilon\, v + \dots)\right)$$
$$= v^i\, \partial_i \varphi(x) + \dots = \mathbf{v}[\varphi](x) ,$$

donde hemos omitido términos de orden $\mathcal{O}(\epsilon^2)$.

Derivada de Lie de un campo vectorial

La derivada de Lie de una función coincide con la acción del campo vectorial sobre la función en cada punto.

Podemos definir la derivada de Lie de un campo vectorial a través del cociente incremental

$$\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathbf{w} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon}\left(\mathbf{w} - \sigma_{\epsilon\star}\mathbf{w}\right) .$$

En coordenadas,

$$(\sigma_{\epsilon\star}\mathbf{w})^i(x) = \frac{\partial\sigma^i(\epsilon, x)}{\partial x^j}\, w^j(\sigma_\epsilon^{-1}(x)) = \frac{\partial(x^i + \epsilon\, v^i(x) + \ldots)}{\partial x^j}\, w^j(x - \epsilon v + \ldots)$$

$$= (\delta^i{}_j + \epsilon\,\partial_j v^i(x) + \ldots)\,(w^j(x) - \epsilon\, v^k\,\partial_k w^j + \ldots)$$

$$= w^i(x) + \epsilon(w^j\partial_j v^i - v^j\partial_j w^i)(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2) .$$

Por lo tanto,

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathbf{w})^i(x) = (v^j\partial_j w^i - w^j\partial_j v^i)(x) .$$

Corchete de Lie

Dados dos campos vectoriales $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, se define el corchete de Lie, $[\mathbf{v}\,,\,\mathbf{w}]$ como una aplicación

$$\begin{array}{rcl} [\,,\,] : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) & \rightarrow & \mathcal{T}(M) \\ \mathbf{v}, \mathbf{w} & \rightarrow & \mathbf{z} = [\mathbf{v}\,,\,\mathbf{w}]\,. \end{array}$$

El nuevo campo vectorial, $\mathbf{z}$, actúa sobre una función $\varphi \in \mathcal{F}(M)$ como

$$\mathbf{z}[\varphi] = [\mathbf{v}\,,\,\mathbf{w}]\,[\varphi] = \mathbf{v}[\mathbf{w}[\varphi]] - \mathbf{w}[\mathbf{v}[\varphi]]\,.$$

Ahora, mediante un simple cálculo en componentes,

$$\mathbf{v}[\mathbf{w}[\varphi]] = \mathbf{v}[w^i \partial_i \varphi] = v^j \partial_j (w^i \partial_i \varphi) = v^j (\partial_j w^i) \partial_i \varphi + v^j\, w^i \partial_j \partial_i \varphi\,,$$

por lo que

$$\mathbf{v}[\mathbf{w}[\varphi]] - \mathbf{w}[\mathbf{v}[\varphi]] = (v^j \partial_j w^i - w^j \partial_j v^i) \partial_i \varphi\,,$$

lo que demuestra la siguiente identidad

$$\mathcal{L}_{\mathbf{v}} \mathbf{w} = [\mathbf{v}\,,\,\mathbf{w}]\,.$$