

Física–Matemática: Teoría de Grupos

Abril–Junio de 2011

1 Conceptos Básicos en Teoría de Grupos

La teoría de grupos proporciona el lenguaje adecuado para formular y desarrollar los principios de **simetría** inherentes a la Física. Gran parte de la estructura que aparece en la resolución de un sistema, tanto en la física clásica como en la física cuántica, es consecuencia de la simetría subyacente a dicho sistema. La teoría de grupos trata de desarrollar esos aspectos universales que presentan todos los sistemas que contienen simetrías de naturaleza análoga. Se trata, por tanto, de un conocimiento fundamental para poder resolver un enorme conjunto de problemas de la física. En el marco de la teoría de grupos juega un rol fundamental la llamada teoría de representaciones, la que permite clasificar los objetos físicos según la simetría que subyace al sistema de interés. La teoría de grupos es un campo muy amplio. Este curso, dadas las limitaciones de tiempo, debe considerarse introductorio. Se espera, sin embargo, discutir un conjunto de temas suficiente para que el alumno interesado pueda moverse por las referencias recomendadas con cierta soltura.

1.1 Concepto de Grupo

Def. 1.1 *Un grupo es un conjunto de elementos $\{g_1, g_2, \dots\}$ dotados de una ley de composición (multiplicación), que a cada par ordenado $g_i, g_j \in G$ le asigna otro elemento $g_i g_j$ de forma tal que se satisfacen las siguientes propiedades*

i. (cierre) *La ley de composición es interna, si $g_i, g_j \in G$, entonces $g_i g_j \in G$.*

ii. (asociatividad). *Para todo $g_i, g_j, g_k \in G$*

$$g_i(g_j g_k) = (g_i g_j)g_k. \quad (1)$$

iii. (elemento unidad). *Existe un único elemento, denotado usualmente e , con la propiedad de que $\forall g_i \in G$*

$$e g_i = g_i e = g_i. \quad (2)$$

iv. (elemento inverso). *Para cada g_i existe un único elemento g_i^{-1} tal que*

$$g_i^{-1} g_i = g_i g_i^{-1} = e. \quad (3)$$

Def. 1.2 *La multiplicación en general no es conmutativa; es decir, en general $g_i g_j \neq g_j g_i$. Decimos que G es **abeliano** cuando $g_i g_j = g_j g_i$ para todo par g_i, g_j .*

Def. 1.3 El número de elementos de G se denomina **orden** de G , y se designa como $\mathcal{O}(G)$. Si el orden es un número finito, decimos que G es un **grupo finito**. La forma más inmediata de presentar a un grupo finito consiste en mostrar su **tabla de multiplicación**,

| | | | | |
|----------------------|-------------------------|-------------------------|----------|--|
| \cdot | g_1 | g_2 | \cdots | $g_{\mathcal{O}(G)}$ |
| g_1 | g_1g_1 | g_1g_2 | \cdots | $g_1g_{\mathcal{O}(G)}$ |
| g_2 | g_2g_1 | g_2g_2 | \cdots | $g_2g_{\mathcal{O}(G)}$ |
| \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | \vdots |
| $g_{\mathcal{O}(G)}$ | $g_{\mathcal{O}(G)}g_1$ | $g_{\mathcal{O}(G)}g_2$ | \cdots | $g_{\mathcal{O}(G)}g_{\mathcal{O}(G)}$ |

en la que no puede haber repetición de elementos en una misma fila, $gg_1 \neq gg_2$, ni columna, $g_1g \neq g_2g$. La propiedad de asociatividad ha de verificarse separadamente. Si el grupo es abeliano, la tabla es simétrica respecto de la diagonal principal.

Ejemplos

1. $(\mathbf{R}, +)$. Sin embargo, $(\mathbf{R}, -)$ no lo es (no es asociativo). Tampoco (\mathbf{R}, \times) , ya que el cero no tiene inverso. En cambio, $(\mathbf{R} - \{0\}, \times)$ sí es un grupo. Lo mismo que (\mathbf{R}^+, \times) .
2. $GL(N, \mathbf{R})$. El grupo lineal, $GL(N, \mathbf{R})$ tiene por elementos todas las matrices de orden $N \times N$ con valores reales y determinante no nulo. Análogamente se define $GL(N, \mathbf{C})$, el grupo de matrices complejas.
3. Las simetrías del **paralelepípedo orientado** con la composición de rotaciones. Es uno de los dos grupos de orden 4. Es abeliano,

| | | | |
|------------|------------|------------|------------|
| \cdot | $R_x(\pi)$ | $R_y(\pi)$ | $R_z(\pi)$ |
| $R_x(\pi)$ | e | $R_z(\pi)$ | $R_y(\pi)$ |
| $R_y(\pi)$ | $R_z(\pi)$ | e | $R_x(\pi)$ |
| $R_z(\pi)$ | $R_y(\pi)$ | $R_x(\pi)$ | e |

y es un subgrupo de $SO(3)$.

4. S_n . Permutaciones de n elementos donde la multiplicación es la simple composición de permutaciones sucesivas:

$$\begin{pmatrix} g'_1 & g'_2 & \cdots & g'_n \\ g''_1 & g''_2 & \cdots & g''_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g'_1 & g'_2 & \cdots & g'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g''_1 & g''_2 & \cdots & g''_n \end{pmatrix}.$$

Este grupo es en general no abeliano, y su cardinalidad es $n!$. Se llama **Grupo Simétrico**.

5. Z_n . Admite un sistema de generadores formado por un solo elemento (se dice que $g_1, g_2, \dots, g_k \in G$ son **generadores** de G si constituyen el menor conjunto de elementos cuyos productos reproducen completamente a G). Es decir, sus n elementos pueden escribirse como $Z_n = \{a, a^2, \dots, a^n \equiv e\}$. Se puede *representar* al elemento a como una de las raíces enésimas de la unidad, en cuyo caso la operación del grupo sería la multiplicación ordinaria de números complejos. Se llama **Grupo Cíclico** de orden n . También puede pensarse como los enteros módulo n con ley de composición: la adición (mod n), o como el grupo de transformaciones de simetría de un polígono regular con n lados y direccionado. Es abeliano.

Otros Contraejemplos

1. (\mathbf{Z}, \times) : el conjunto no contiene los inversos $1/n$.
2. (\mathbf{Q}^-, \times) , (\mathbf{V}, \cdot) , $(\mathbf{Z}, /)$: no es una operación interna.
3. (\mathbf{V}, \times) : no es asociativo ni tiene identidad. Tampoco $(\mathbf{R} - \{0\}, +)$.

Def. 1.4 Para todo elemento g de un grupo finito, existe un número natural n tal que $g^n = e$, al que se denomina orden de g . Al conjunto $\{g, g^2, \dots, g^n \equiv e\}$ se lo denomina ciclo de g en G .

Def. 1.5 Sea una aplicación entre dos grupos $f : G \rightarrow G'$, tal que preserva sus respectivas leyes de composición, es decir:

$$\forall g_1, g_2, g_3 \in G \quad g_1 g_2 = g_3 \Rightarrow f(g_1) f(g_2) = f(g_3) . \quad (4)$$

Si la aplicación es uno a uno se la denomina **isomorfismo** (se dice en este caso que G y G' son **isomorfos**).

Def. 1.6 Si la correspondencia no es uno a uno pero se preserva la ley de composición se dice que G y G' son **homomorfos**. Si $G = G'$ la aplicación recibe el nombre de **automorfismo**.

Ejemplos

1. Sean $Z_6 = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$ y $Z_2 = \{e', b\}$. La aplicación $\sigma : Z_6 \rightarrow Z_2$:

$$\sigma(e) = \sigma(a^2) = \sigma(a^4) = e' \quad \sigma(a) = \sigma(a^3) = \sigma(a^5) = b$$

es un homomorfismo. En cambio, $\rho : Z_6 \rightarrow Z_6$:

$$\rho(e) = e \quad \rho(a) = a^5 \quad \rho(a^2) = a^4 \quad \rho(a^3) = a^3 \quad \rho(a^4) = a^2 \quad \rho(a^5) = a$$

es un automorfismo (a cada elemento se le asocia su inverso y el grupo es abeliano).

2. Sean $G = (\mathbf{R}^+, \times)$ y $G' = (\mathbf{R}, +)$. La aplicación, $\log : G \rightarrow G'$ es un isomorfismo.

Def. 1.7 La **notación de ciclos** permite identificar los elementos de S_n de un modo sencillo. Consiste en identificar ciclos cerrados de permutaciones dentro del elemento considerado. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \equiv (123)(45) ,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \equiv (1)(253)(4) .$$

Esto permite componer permutaciones de forma más o menos sencilla, notando que:

- (i) dos ciclos son el mismo si coinciden salvo permutación cíclica de sus elementos.
- (ii) ciclos de un elemento pueden ser omitidos,
- (iii) ciclos disjuntos conmutan entre sí ,
- (iv) ciclos que tengan un sólo elemento en común simplemente se encadenan (por ejemplo, $(253)(45) = (325)(54) = (3254)$).

Def. 1.8 Un ciclo de dos elementos es llamado **trasposición**. Cualquier n -ciclo puede ser escrito como el producto de $n-1$ trasposiciones:

$$(12\dots n) = (1n)\dots(13)(12) .$$

En general, si n elementos forman un elemento del grupo S_n que contiene k ciclos, su **decremento** es $n-k$. Si el decremento es par (impar), la permutación es par (impar) (puede escribirse como el producto de un número par (impar) de trasposiciones).

1.2 Subgrupos

Def. 1.9 Un **subgrupo** H de un grupo G es un subconjunto de G que a su vez forma un grupo bajo la misma ley de composición de G . El elemento neutro y el propio G son dos subgrupos triviales (impropios) de G . Cualquier otro subgrupo que no sea ninguno de estos se denomina subgrupo **propio**. Sólo hace falta verificar que la composición es cerrada en H y que todo elemento tiene inverso. Cuando G es finito sólo debe verificarse que la ley de composición es cerrada (el inverso existe trivialmente: si $h^r = e$ entonces $h^{r-1} = h^{-1}$).

Ejemplos

1. $(\mathbf{Z}, +) \subset (\mathbf{R}, +)$.

2. Sea $H_n = \{k2^n\}$ con la suma como ley de composición. Se cumple

$$\dots \subset H_n \subset \dots \subset H_2 \subset H_1 \subset (\mathbf{Z}, +)$$

Y, además, $\sigma : H_n \rightarrow H_m$ como $\sigma(k2^n) = k2^m$ es uno a uno y conserva la ley de composición. Entonces, todos los H_n son isomorfos entre sí y respecto del grupo $(\mathbf{Z}, +)$

$$\dots \sim H_n \sim \dots \sim H_2 \sim H_1 \sim (\mathbf{Z}, +)$$

Un grupo (infinito) puede ser isomorfo a sus subgrupos propios.

3. $Z_n \subset S_n$, formado por los elementos e , $a = (1234 \dots n)$ y las potencias de a .

4. El ciclo de cualquier elemento g en G es un subgrupo abeliano.

Teorema 1.1 (Teorema de Cayley): *Todo grupo G de orden n es isomorfo a algún subgrupo del grupo simétrico S_n . Basta considerar los subgrupos de S_n para clasificar todos los grupos finitos.*

Dem. Para todo $g \in G$, se puede construir su correspondiente fila de la tabla de multiplicación mediante el producto gg_i . Esto reproduce la lista de todos los elementos de G en un nuevo orden. Se puede construir el isomorfismo $\Pi : G \rightarrow H_n^{reg}$, con H_n^{reg} un subgrupo de S_n de orden n ,

$$\Pi(g) = \begin{pmatrix} g_1 & \dots & g_n \\ gg_1 & \dots & gg_n \end{pmatrix}.$$

Se verifica que $\Pi(gh) = \Pi(g)\Pi(h)$,

$$\begin{aligned} \Pi(gh) &= \begin{pmatrix} g_1 & \dots & g_n \\ ghg_1 & \dots & ghg_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} hg_1 & \dots & hg_n \\ g(hg_1) & \dots & g(hg_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 & \dots & g_n \\ hg_1 & \dots & hg_n \end{pmatrix} = \Pi(g)\Pi(h), \end{aligned}$$

$\Pi(e) = (e)$ y, claro está, $\Pi(g^{-1}) = (\Pi(g))^{-1}$,

$$\begin{aligned} \Pi(g^{-1}) &= \begin{pmatrix} g_1 & \dots & g_n \\ g^{-1}g_1 & \dots & g^{-1}g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} gg_1 & \dots & gg_n \\ g^{-1}(gg_1) & \dots & g^{-1}(gg_n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} gg_1 & \dots & gg_n \\ g_1 & \dots & g_n \end{pmatrix} = (\Pi(g))^{-1}. \end{aligned}$$

Estas permutaciones no dejan ningún elemento sin cambiar (se denominan **permutaciones regulares**). Por lo tanto, todos los ciclos de las mismas deben tener la misma longitud. Entonces, si n es primo, los ciclos deben ser de longitud máxima (n), *i.e.* todos los grupos de orden n primo son isomorfos a Z_n . Además, el número de grupos no isomorfos de orden n es finito (igual al número de particiones de n).

Teorema 1.2 (Teorema de Lagrange). *En un grupo finito G el orden de cualquier subgrupo $H \subset G$ es un divisor del orden de G . Si el orden de un grupo es primo, éste no posee subgrupos propios.*

Def. 1.10 *Dos elementos g_1 y g_2 de un grupo G son **conjugados** si existe un tercer elemento g tal que $g_2 = gg_1g^{-1}$. Si G actúa sobre un espacio vectorial, la equivalencia bajo conjugación surge de la ambigüedad en la elección de la base de dicho espacio. La conjugación establece una **relación de equivalencia** \sim entre los elementos de G . Efectivamente podemos verificar que es:*

- i. (reflexiva) $a \sim a$, en virtud de que $a = ea = ae$.
- ii. (simétrica) $a = bgb^{-1} \Rightarrow b = g'ag'^{-1}$, con $g' = g^{-1}$.
- iii. (transitiva) $a = bgb^{-1}$ y $b = hch^{-1} \Rightarrow a = (gh)c(gh)^{-1}$.

Def. 1.11 *Dada una relación de equivalencia, la **clase de equivalencia** de un elemento g , que denotaremos como (g) , se define por:*

$$(g) = \{g' \in G \mid g' \sim g\}$$

*La subdivisión de un conjunto en clases de equivalencia es una partición en subconjuntos disjuntos. Si $g' \in (g)$ y $g'' \in (h)$, $g' = g_1gg_1^{-1}$ y $g'' = g_2hg_2^{-1}$. Por lo tanto, $h = (g_2^{-1}g_1)g(g_2^{-1}g_1)^{-1}$, es decir, $(h) = (g)$. Todo grupo G admite una descomposición en **clases de conjugación**. El elemento e constituye una clase conjugada. El número de clases de conjugación es menor o igual (si es abeliano) que el orden del grupo.*

Def. 1.12 *Un subgrupo normal o invariante $H \subset G$ verifica*

$$gHg^{-1} = H \quad \forall g \in G. \tag{5}$$

Están compuestos de clases de conjugación completas. Además, sus cosets por la izquierda y por la derecha coinciden $gH = Hg$.

Def. 1.13 *Un grupo G es **simple** si no posee ningún subgrupo invariante propio. Se dice que G es **semisimple** si ninguno de sus subgrupos invariantes es abeliano.*

Ejemplo

Consideremos $SL(n) \subset GL(n)$, es un subgrupo invariante (como se ve a partir de las propiedades del determinante). Por lo tanto, $GL(n)$ no es simple.

Def. 1.14 *Sea $g \in G$, se denomina **centralizador** de g al conjunto de todos los elementos $x \in G$ que conmutan con g , $xg = gx$. Es un subgrupo (no necesariamente abeliano). De hecho, si $xg = gx$ e $yg = gy$, $xyg = gxy$ (ley interna) y $\exists x^{-1}$ tal que $x^{-1}x = e$, entonces, $x^{-1}xg = x^{-1}gx = gx^{-1}x \Rightarrow x^{-1}g = gx^{-1}$ (incluye al inverso).*

Def. 1.15 El **centro** Z , de un grupo G es el subconjunto de elementos z , que conmutan con todos los elemento de G ,

$$Z = \{z \in G \mid zg = gz \ \forall g \in G\}. \quad (6)$$

Es la intersección de todos los centralizadores. Es invariante y abeliano.

Ejemplo

Sea $SU(n)$, el centro está formado por todas las matrices de la forma $e^{(2\pi im/n)}1_n$, $m = 0, 1, \dots, n - 1$. Es abeliano y evidentemente isomorfo al grupo cíclico Z_n ,

$$\varphi : e^{(2\pi im/n)}1_n \rightarrow a^m .$$

1.3 Producto Directo

Def. 1.16 Decimos que G es **producto directo** de un conjunto de subgrupos H_1, H_2 y H_k , $G = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_k$, si:

- i. todos los elementos de los distintos H_i conmutan.
- ii. todo elemento de G admite una expresión única

$$g = h_1 h_2 \dots h_n \quad h_i \in H_i$$

Propiedades

- i. El único elemento común a todos los H_i es e .
- ii. El producto puede hacerse componente a componente, y de este modo puede definirse el producto directo de grupos

$$\hat{G} = G \times G' = \{(g, g'), g \in G, g' \in G'\}$$

La identidad es $\hat{e} = (e, e')$ y el orden del producto directo es el producto de los órdenes. Finalmente,

$$\hat{f}\hat{g} = (f, f')(g, g') = (fg, f'g'),$$

donde para cada producto es usada la ley de composición correspondiente. Se conecta con la definición anterior, identificando a los subgrupo de \hat{G} , $\Gamma = \{(g, e')\} \sim G$, y $\Gamma' = \{(e, g')\} \sim G'$, tales que $\hat{G} = \Gamma \times \Gamma'$.

- iii. Cada H_i es un subgrupo invariante de G .

Ejemplo

El grupo cíclico Z_6 puede escribirse como $Z_6 = H_1 \times H_2$ con $H_1 = \{e, a^2, a^4\}$ y $H_2 = \{e, a^3\}$. Como $H_1 \sim Z_3$ y $H_2 \sim Z_2$, podemos escribir $Z_6 = Z_3 \times Z_2$.

1.4 Cosets

Def. 1.17 Sea $H \subset G$. Se define el **coset izquierdo** $gH = \{gh|h \in H\}$. Análogamente, el **coset derecho** $Hg = \{hg|h \in H\}$. No son subgrupos de G (no contienen e) salvo que $g \in H$, en cuyo caso $gH = H$. gH y Hg contienen el mismo número de elementos que H . Los cosets permiten partir G en una serie k de conjuntos disjuntos con el mismo número de elementos $\text{ord}(H)$, tal que: $\text{ord}(G) = k \text{ord}(H)$ (lo que demuestra el teorema de Lagrange).

Def. 1.18 Se define como **índice** del subgrupo H al número de cosets distintos gH que pueden contruirse con él. Se denota $(G : H)$.

Def. 1.19 Se define el **espacio de cosets izquierdos (derechos)** G/H ($H \setminus G$) como el conjunto de cosets izquierdos (derechos) gH (Hg).

Teorema 1.3 Sea H un subgrupo invariante de G . Entonces, $G/H = H \setminus G$ y además, G/H tiene estructura de grupo (**grupo cociente**).

Ejemplos

1. Sea $G = (\mathbf{R} - \{0\}, \times)$, es claro que (\mathbf{R}^+, \times) es un subgrupo invariante. El espacio de cosets es $(\mathbf{R} - \{0\})/\mathbf{R}^+ = \{\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^-\} \sim Z_2$.
2. El subgrupo Z_2 (e, a^3) de Z_6 es invariante. Por lo tanto, $Z_6/Z_2 \sim Z_3$ es un grupo.

1.5 Representaciones

Def. 1.20 La forma en que un grupo aparece en la física es a través de una cierta realización en el sistema físico objeto de estudio. Si un conjunto de operadores D_1, D_2, \dots actuando sobre un espacio vectorial V forman un grupo respecto a la aplicación consecutiva, se habla de un **grupo de operadores** o **grupo de transformaciones**.

Def. 1.21 Sea V un espacio vectorial, G un grupo y $D(g), g \in G$ un conjunto de operadores sobre V . Se dice que dichos operadores forman una **representación del grupo G sobre V** si:

$$D(g)D(g') = D(gg') \quad D(g^{-1}) = (D(g))^{-1} \quad D(e) = 1_V, \quad (7)$$

siendo la dimensión de la representación igual a $n = \dim V$. En otras palabras, una representación de dimensión n , de un grupo abstracto G , es un **homomorfismo** entre el grupo y las matrices complejas $n \times n$ no singulares, $D : G \rightarrow GL(n, \mathbf{C})$. Dada

una base $\{e_i\}$ del espacio vectorial V , las matrices que representan a los operadores D se construyen como:

$$De_i = \sum_{j=1}^n e_j D_{ji}$$

y la composición de operadores: $D'(De_i) = D'(e_k D_{ki}) = e_j D'_{jk} D_{ki} = e_j (D'D)_{ji}$.

Def. 1.22 Si la relación entre los elementos de G y los operadores es uno a uno, se dice que la representación es **fiel**. En ella, está claro que $D(g) = 1_V$ sólo para $g = e$. La representación más infiel de todas es $D(g) = 1_V \forall g \in G$. A partir de una representación que no es fiel, dado que los elementos de G representados por la unidad constituyen un subgrupo invariante H , vemos que la representación de G/H es fiel.

Def. 1.23 Si los operadores D son lineales se dice que la representación es **lineal**. Consideraremos representaciones lineales y finitas, el caso más habitual en la física.

Ejemplo

Construcción de una representación matricial de dimensión n para el grupo S_n . A todo elemento de S_n se le puede asociar una matriz $n \times n$ del modo siguiente:

$$\begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_{n-1} & g_n \\ g_4 & g_2 & \cdots & g_1 & g_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

que actúa sobre el espacio vectorial n -dimensional de vectores v , tales que $v^t = (g_1 \ g_2 \ \cdots \ g_{n-1} \ g_n)$. Notar que existe un único elemento no nulo (e igual a 1) por cada fila o columna, y en el caso de las permutaciones regulares (las que salen del teorema de Cayley), todos los elementos de la diagonal deben ser nulos.

Def. 1.24 Dos representaciones D y D' de un grupo G son **equivalentes** si existe un operador invertible S tal que:

$$D(g) = SD'(g)S^{-1}, \quad \forall g \in G \quad (8)$$

Representaciones dadas por matrices expresadas en distintas bases de V son equivalentes (esto define una relación de equivalencia).

Def. 1.25 Una representación es **reducible** si existe un subespacio vectorial de V invariante bajo la acción de todos los elementos $D(g), g \in G$ de la representación. Existe una base en la que

$$D(g) = \begin{pmatrix} A_{m \times m} & C_{m \times p} \\ 0_{p \times m} & B_{p \times p} \end{pmatrix} \quad n = m + p \quad (9)$$

de modo que el subespacio $\{e_i\}, i = 1, \dots, m$ es invariante. Notar que $A(g)$ y $B(g)$ constituyen representaciones de G , $n-$ y $m-$ dimensionales respectivamente:

$$D(g)D(g') = \begin{pmatrix} A(g) & C(g) \\ 0 & B(g) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(g') & C(g') \\ 0 & B(g') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(g)A(g') & * \\ 0 & B(g)B(g') \end{pmatrix},$$

donde $*$ es una combinación complicada de componentes de $A(g)$, $C(g)$, $B(g')$ y $C(g')$, mientras que

$$D(gg') = \begin{pmatrix} A(gg') & C(gg') \\ 0 & B(gg') \end{pmatrix},$$

es decir,

$$A(gg') = A(g)A(g') \quad B(gg') = B(g)B(g').$$

Def. 1.26 Si además $C = 0$, se dice que la representación es **completamente reducible**, y se denota $D = A \oplus B$. En este caso, también se puede descomponer el espacio vectorial V como suma directa de subespacios vectoriales invariantes, $V = V_A \oplus V_B$.

Def. 1.27 Una representación $D(g)$ sobre V de un grupo G es **irreducible** si no existe ningún subespacio de V que es dejado invariante bajo la acción de todos los $D(g), g \in G$.

Def. 1.28 Una representación D es **unitaria** si las matrices u operadores son unitarios: $D^\dagger = D^{-1}$.

Teorema 1.4 Toda representación de un grupo finito es equivalente a una representación unitaria.

Dem. Sea un grupo G de orden k y una representación D del mismo de dimensión n . Consideremos la siguiente definición de producto escalar sobre V ,

$$((\vec{u}, \vec{v})) \equiv \frac{1}{k} \sum_{g \in G} (D(g)\vec{u}, D(g)\vec{v}),$$

donde $(,)$ es el producto escalar canónico sobre V . Se trata de un producto escalar bien definido: $((\vec{v}, \vec{u})) = ((\vec{u}, \vec{v}))^*$, $((\vec{u}, \lambda\vec{v})) = \lambda((\vec{u}, \vec{v}))$, $((\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v})) = ((\vec{u}_1, \vec{v})) + ((\vec{u}_2, \vec{v}))$ y $((\vec{u}, \vec{u})) \geq 0$. Ahora, para cualquier elemento h de G :

$$\begin{aligned} ((D(h)\vec{u}, D(h)\vec{v})) &= \frac{1}{k} \sum_{g \in G} (D(g)D(h)\vec{u}, D(g)D(h)\vec{v}) \\ &= \frac{1}{k} \sum_{g \in G} (D(gh)\vec{u}, D(gh)\vec{v}) \\ &= \frac{1}{k} \sum_{g' \in G} (D(g')\vec{u}, D(g')\vec{v}) \\ &= ((\vec{u}, \vec{v})), \end{aligned}$$

es decir, la representación es unitaria respecto del producto escalar $((,))$ (aunque no lo es respecto del producto escalar ordinario). Ahora, consideremos las bases ortonormales \vec{x}_i y \vec{y}_i respecto de los productos escalares $(,)$ y $((,))$ respectivamente:

$$(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = ((\vec{y}_i, \vec{y}_j)) = \delta_{ij} ,$$

y un operador \hat{T} que lleva de una base a la otra $\vec{y}_i = \hat{T}\vec{x}_i$, de modo que si $\vec{u} = u_i\vec{x}_i$ y $\vec{v} = v_i\vec{x}_i$,

$$((\hat{T}\vec{u}, \hat{T}\vec{v})) = u_i^* v_j ((\vec{y}_i, \vec{y}_j)) = u_i^* v_j (\vec{x}_i, \vec{x}_j) = (\vec{u}, \vec{v}) \Rightarrow ((\vec{u}, \vec{v})) = (\hat{T}^{-1}\vec{u}, \hat{T}^{-1}\vec{v}) .$$

Entonces, la representación equivalente $D' = \hat{T}^{-1}D\hat{T}$ verifica:

$$\begin{aligned} (D'(h)\vec{u}, D'(h)\vec{v}) &= (\hat{T}^{-1}D(h)\hat{T}\vec{u}, \hat{T}^{-1}D(h)\hat{T}\vec{v}) \\ &= ((D(h)\hat{T}\vec{u}, D(h)\hat{T}\vec{v})) = ((\hat{T}\vec{u}, \hat{T}\vec{v})) \\ &= (\vec{u}, \vec{v}) , \end{aligned}$$

es decir que la representación equivalente D' es **unitaria**.

Nota: Este resultado también es válido para grupos de Lie compactos. Toda representación unitaria (de un grupo finito o de Lie compacto), siempre puede descomponerse en combinación lineal de representaciones irreducibles. Esto se debe a que, en el caso de representaciones unitarias, reducibilidad \rightarrow reducibilidad completa.

Lema de Schur: Cualquier matriz que conmuta con todas las matrices de una representación irreducible ha de ser un múltiplo de la matriz unidad.

Dem. Sea A , tal que $AD(g) = D(g)A, \forall g \in G$. Podemos considerar que la representación es unitaria sin que esto suponga una restricción especial, debido al resultado del teorema anterior. Además, en ese caso, si $AD(g) = D(g)A$ también $A^\dagger D(g) = D(g)A^\dagger$, por lo que las combinaciones lineales hermíticas $H_1 = A + A^\dagger$ y $H_2 = i(A - A^\dagger)$ también conmutan con todas las matrices $D(g)$. Si somos capaces de probar que H_1 y H_2 son proporcionales a la matriz unidad, habremos probado que $A = (H_1 - iH_2)/2$ lo es. Como estas matrices son hermíticas, pueden ser diagonalizadas $H_i v_i = \lambda_i v_i, v_i \in V$ Entonces,

$$H_i D(g) v_i = D(g) H_i v_i = \lambda_i D(g) v_i .$$

Pero D es irreducible, entonces el subespacio asociado al autovalor λ_i es todo V : $H_i = \lambda_i 1_V$. Por lo tanto, $A = \lambda 1_V$.

Corolario: Todas las representaciones irreducibles de un grupo abeliano son unidimensionales (ya que todas deben ser diagonales).

Segundo Lema de Schur: Sean D y D' dos representaciones irreducibles de dimensiones d y d' , y A una matriz (no cuadrada) que verifica $AD(g) = D'(g)A, \forall g \in G$, entonces: $A \equiv 0$, o bien $d = d'$ en cuyo caso D y D' son equivalentes.

Dem.

Sean V y V' los espacios vectoriales invariantes correspondientes a D y D' . La matriz A es una aplicación lineal, $A : V \rightarrow V'$. Definamos

$$K = \text{Kernel}(A) = \{k \in V / Ak = 0'\} ,$$

$$W = \text{Imagen}(A) = \{w \in V' / \exists v \in V, Av = w\} .$$

Entonces:

Si $d < d'$

$$\forall w \in W, D'(g)w = D'(g)Av = AD(g)v = A\hat{v} = \hat{w} \in W$$

por lo tanto $W \subset V'$ es un subespacio invariante. Pero D' es irreducible, entonces:

- (i) $W = V'$, no puede ser porque $\dim W = \dim AV \leq d < d'$ o
- (ii) $W = 0$, es decir $A \equiv 0$.

Si $d > d'$

$$\forall k \in K, AD(g)k = D'(g)Ak = 0' \Rightarrow D(g)k \in K$$

Por lo tanto $K \subset V$ es un subespacio invariante. Pero D es irreducible, entonces:

- (i) $K = 0$ no puede ser porque A sería un isomorfismo y $d \neq d'$ o
- (ii) $K = V$, es decir $AV = 0$, $A \equiv 0$.

Si $d = d'$ Idem que el anterior, pero valen las dos opciones, es decir: $A \equiv 0$, o bien A es un isomorfismo, entonces

$$\exists A^{-1} \quad \text{tal que} \quad D'(g) = AD(g)A^{-1} .$$

Teorema 1.5 (Teorema Fundamental de Ortogonalidad). Sean $D^{(a)}$ las distintas representaciones unitarias e irreducibles **no equivalentes** de un grupo G de orden n , de dimensiones d_a . Entonces, se verifica la relación de ortogonalidad

$$\sum_{g \in G} D_{\alpha\mu}^{(a)*}(g) D_{\beta\nu}^{(b)}(g) = \frac{n}{d_a} \delta_{ab} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu} . \quad (10)$$

Dem. Sea $D^{(a)}$ una representación irreducible unitaria de dimensión d_a del grupo G de orden n . Para cualquier matriz $d_a \times d_a$, X , podemos construir una matriz A ,

$$A = \sum_{g \in G} D^{(a)}(g^{-1}) X D^{(a)}(g) \quad \text{tal que} \quad D^{(a)}(g') A = A D^{(a)}(g') .$$

Entonces (lema de Schur), $A = \lambda 1_{d_a \times d_a}$. En particular, si elegimos X como una matriz cuyo único elemento no nulo es $X_{\alpha\beta} = 1$,

$$\sum_{g \in G} D_{\mu\alpha}^{(a)}(g^{-1}) D_{\beta\nu}^{(a)}(g) = \sum_{g \in G} D_{\alpha\mu}^{(a)*}(g) D_{\beta\nu}^{(a)}(g) = \lambda \delta_{\mu\nu} ,$$

y el valor de λ puede determinarse poniendo $\mu = \nu$ y evaluando la traza,

$$\sum_{\mu} \sum_{g \in G} D_{\mu\alpha}^{(a)}(g^{-1}) D_{\beta\mu}^{(a)}(g) = \sum_{g \in G} D_{\beta\alpha}^{(a)}(gg^{-1}) = n \delta_{\alpha\beta} = \lambda d_a \Rightarrow \lambda = \frac{n}{d_a} \delta_{\alpha\beta} .$$

Ahora, consideremos dos representaciones unitarias e irreducibles $D^{(a)}$ y $D^{(b)}$ **no equivalentes**, y la matriz A ,

$$A = \sum_{g \in G} D^{(a)}(g^{-1}) X D^{(b)}(g) \quad \text{tal que} \quad D^{(a)}(g') A = A D^{(b)}(g') ,$$

para cualquier matriz rectangular $d_a \times d_b$, X . Entonces (segundo lema de Schur), $A = 0$. Por lo tanto, si elegimos X como en el caso anterior, resulta

$$\sum_{g \in G} D_{\mu\alpha}^{(a)}(g^{-1}) D_{\beta\nu}^{(b)}(g) = \sum_{g \in G} D_{\alpha\mu}^{(a)*}(g) D_{\beta\nu}^{(b)}(g) = 0 .$$

Def. 1.29 *Sea D una representación de un grupo G de dimensión d . El **caracter** $\chi^D(g)$ asociado a un elemento $g \in G$ es la traza de la matriz que lo representa*

$$\chi^D(g) = \text{tr} (D(g)) = \sum_{i=1}^d D_{ii}(g) , \quad (11)$$

y cumple con las siguientes propiedades:

- i. *El caracter asociado a dos representaciones equivalentes es el mismo.*
- ii. *Dos elementos conjugados tienen el mismo caracter. Basta dar la tabla de caracteres para las clases de conjugación K_i de G .*
- iii. $\chi^D(e) = d$.
- iv. *Si D es unitaria, $D^\dagger = D^{-1}$, entonces $\chi(g^{-1}) = \chi^*(g)$.*

Teorema 1.6 (Ortogonalidad de los Caracteres). *Sean $D^{(a)}$ las distintas representaciones unitarias e irreducibles **no equivalentes** de un grupo G de orden n , de dimensiones d_a , y sean $\chi^{(a)}$ los caracteres correspondientes. Entonces:*

$$\sum_{g \in G} [\chi^{(a)}(g)]^* \chi^{(b)}(g) = n \delta_{ab} . \quad (12)$$

Dem. A partir del Teorema Fundamental de Ortogonalidad, poniendo $\alpha = \mu$ y $\beta = \nu$ en la ecuación (10), y sumando sobre ambos índices, resulta

$$\sum_{\mu=1}^{d_a} \sum_{\nu=1}^{d_b} \sum_{g \in G} D_{\mu\mu}^{(a)*}(g) D_{\nu\nu}^{(b)}(g) = \sum_{g \in G} [\chi^{(a)}(g)]^* \chi^{(b)}(g) = n \delta_{ab} .$$

Teorema 1.7 Si dos representaciones (no necesariamente irreducibles) de un grupo finito poseen el mismo sistema de caracteres, dichas representaciones son equivalentes.

Ejemplo:

Veamos las representaciones de orden más bajo de los grupos isomorfos $S_3 \sim D_3$, y sus respectivos caracteres (notar que $D^{(2)}$ corresponde a la representación por la paridad de la permutación):

| (g) | $g \in S_3$ | $g \in D_3$ | $D^{(1)}$ | $D^{(2)}$ | $D^{(3)}$ | $\chi^{(1)}$ | $\chi^{(2)}$ | $\chi^{(3)}$ |
|-------|-------------|-------------|-----------|-----------|---|--------------|--------------|--------------|
| K_1 | $()$ | e | 1 | 1 | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | 1 | 1 | 2 |
| K_2 | (123) | c | 1 | 1 | $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ | 1 | 1 | -1 |
| | (132) | c^2 | 1 | 1 | $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ | 1 | 1 | -1 |
| K_3 | (23) | x | 1 | -1 | $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ | 1 | -1 | 0 |
| | (13) | xc | 1 | -1 | $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ | 1 | -1 | 0 |
| | (12) | xc^2 | 1 | -1 | $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | 1 | -1 | 0 |

Teorema 1.8 El número de veces n_a que una representación irreducible $D^{(a)}$ aparece en una representación reducible D de un grupo finito G , está dado por:

$$n_a = \frac{1}{\text{ord}G} \sum_{g \in G} \chi^{(a)}(g) [\chi^D(g)]^* . \quad (13)$$

Podemos escribir, en general, una descomposición de la forma

$$D = \sum_{\oplus} n_a D^{(a)} , \quad (14)$$

lo que indica que podemos dotar al conjunto de todas las representaciones de un grupo de una estructura de espacio vectorial sobre los números naturales, donde la base esta formada por las irreducibles. Notar, en particular, que

$$\chi^D(g) = \sum_a n_a \chi^{(a)}(g) . \quad (15)$$

Teorema 1.9 Una condición necesaria y suficiente para que una representación D de un grupo finito G sea irreducible es:

$$\frac{1}{\text{ord } G} \sum_{g \in G} |\chi^D(g)|^2 = 1 . \quad (16)$$

Nota: Estos cuatro últimos teoremas son también válidos para grupos de Lie compactos, reemplazando

$$\frac{1}{\text{ord } G} \sum_{g \in G} \quad \text{por} \quad \int_G d\mu(g) ,$$

la medida de integración invariante.

Def. 1.30 Se llama **representación regular** a la representación matricial $n \times n$ (de un grupo finito de orden n), que se corresponde con las permutaciones regulares de S_n que son imagen del isomorfismo del teorema de Cayley. Cada elemento viene representado por una matriz D_{ij}^{reg} donde por cada columna y cada fila hay una sólo componente igual a 1, fuera de la diagonal (excepto para $g = e$), y el resto son iguales a 0. Por esta razón los caracteres de la representación regular son siempre de la misma forma:

$$\chi^{reg}(g) = \begin{cases} 0 & g \neq e \\ \text{ord } G & g = e \end{cases} . \quad (17)$$

El número de veces que cada representación irreducible $D^{(a)}$ de dimensión d_a entra en la representación regular es exactamente d_a ,

$$n_a = \frac{1}{\text{ord } G} \sum_{g \in G} \chi^{(a)}(g) [\chi^{reg}(g)]^* = \chi^{(a)}(e) = d_a .$$

Teorema 1.10 La suma de los cuadrados de las dimensiones de las representaciones irreducibles no equivalentes de un grupo finito G es igual al orden de G .

Dem. La descomposición de la representación regular,

$$D^{reg} = \sum_{\oplus} d_a D^{(a)} ,$$

lleva inmediatamente al resultado:

$$\text{ord } G = \chi^{reg}(e) = \sum_a d_a \chi^{(a)}(e) = \sum_a d_a^2 .$$

Por lo tanto, el número de representaciones irreducibles de un grupo finito, no equivalentes, es finito. Más aún:

Teorema 1.11 *El número de representaciones irreducibles no equivalentes de un grupo finito G es igual al número de clases conjugadas de G .*

Ejemplo:

Sea la representación natural de dimensión 3 de S_3 , Γ ,

$$\begin{aligned} \Gamma() &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \Gamma(123) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \Gamma(132) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Gamma(12) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \Gamma(13) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \Gamma(23) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

cuyos caracteres son 3, 0, 0, 1, 1, 1 respectivamente (respetando, por supuesto, las clases de conjugación). Usando la ecuación (16), $(1/6)[3^2 + 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 1^2] = 2 \neq 1$, vemos que esta representación es reducible. De hecho, el número de clases conjugadas es 3, y por lo tanto, tal es el número de representaciones irreducibles. Por lo tanto (ver teorema anterior), $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 6$, es decir, $d_1 = d_2 = 1$ y $d_3 = 2$, que son las representaciones de la tabla presentada previamente. ¿Qué representaciones irreducibles componen la representación anterior? Usando la ecuación (13), podemos verificar que $n_1 = n_3 = 1$, mientras que $n_2 = 0$, es decir:

$$\Gamma = D^{(1)} \oplus D^{(3)} .$$

Def. 1.31 *Si todas las matrices de una representación son reales, se dice que la representación es **real**. Ahora, si D es una representación, D^* también lo es. Entonces, si D es equivalente a una representación real D_R , también $D \sim D^*$,*

$$D_R = CDC^{-1} \quad D_R = C^* D^* (C^*)^{-1} \rightarrow D^* = (C^{-1} C^*)^{-1} D (C^{-1} C^*) .$$

La inversa no es cierta.

Def. 1.32 Si D es equivalente a una representación real, se dice que es **potencialmente real**.

Def. 1.33 Si $D \sim D^*$ pero no es equivalente a una representación real, se dice que D es **pseudo real**. Si D es potencialmente real o pseudo real, sus caracteres son números reales.

Ejemplo:

El grupo de rotaciones del plano, $SO(2)$. Es de orden infinito. De hecho, es un grupo continuo parametrizado por $\theta \in [0, 2\pi)$. Su representación bidimensional estándar, viene dada por

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

y se cumple que $R(\theta)R(\varphi) = R(\theta + \varphi)$, es decir, el grupo es abeliano. Entonces, esta representación es reducible. De hecho,

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \text{ es tal que } MR(\theta)M^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix},$$

y el caracter sigue siendo $\chi^R(\theta) = 2 \cos\theta$.

Def. 1.34 Si D no es equivalente a D^* se dice que es **esencialmente compleja**.

Ejemplos:

1. El grupo Z_3 , es abeliano y consta de tres elementos $\{e, c, c^2\}$, que son clases de conjugación completas. Por tanto tendremos 3 representaciones irreducibles $D^{(a)}(g)$ $a = 1, 2, 3$, unidimensionales. Necesariamente, $D^{(a)}(c)$ ha de ser una de las raíces cúbicas de la unidad, $1, \omega \equiv e^{2\pi i/3}$ ó ω^2 . La tabla de caracteres (siempre cuadrada), pues, resulta

| Z_3 | $D^{(1)}$ | $D^{(2)}$ | $D^{(3)}$ |
|-------|-----------|------------|------------|
| e | 1 | 1 | 1 |
| c | 1 | ω | ω^2 |
| c^2 | 1 | ω^2 | ω |

Notar que, al ser unidimensionales, las representaciones coinciden con los caracteres, $D^{(a)}(g) \equiv \chi^{(a)}(g)$. Las dos representaciones fieles $D^{(2)}$ y $D^{(3)}$ son inequivalentes y son complejas conjugadas la una de la otra, es decir, son esencialmente complejas. Se puede usar la tabla para comprobar las identidades que satisfacen los caracteres. Cada representación irreducible unidimensional está contenida una vez en la representación regular de Z_3 , D^{reg} ,

$$D^{reg} = D^{(1)} \oplus D^{(2)} \oplus D^{(3)}.$$

2. Construyamos la tabla de caracteres de D_3 . Empecemos recordando las tres clases de conjugación: $K_1 = (e)$, $K_2 = (c, c^2)$, $K_3 = (x, xc, xc^2)$. Esperamos tres representaciones irreducibles $D^{(1)}$, $D^{(2)}$ y $D^{(3)}$, tal que $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 6$. Siempre $D^{(1)}(g) = 1$, entonces: $d_2^2 + d_3^2 = 5$, cuya única solución entera es $d_2 = 1$ y $d_3 = 2$. Sabemos que $\chi^{(a)}(e) = d_a$, por lo que ya tenemos la primera fila y la primera columna de la tabla. Para completar la segunda fila recordamos que una representación unidimensional coincide con el caracter (por lo tanto, éste constituye un homomorfismo del grupo en los números complejos), entonces:

$$\chi(x) = \chi(xc) = \chi(x)\chi(c) \Rightarrow \chi(c) = \chi(K_2) = 1 .$$

El último número de la fila se obtiene por ortogonalidad, $\chi(K_3) = -1$. También por ortogonalidad se obtienen los dos elementos restantes,

| D_3 | K_1 | K_2 | K_3 |
|--------------|-------|-------|-------|
| $\chi^{(1)}$ | 1 | 1 | 1 |
| $\chi^{(2)}$ | 1 | 1 | -1 |
| $\chi^{(3)}$ | 2 | -1 | 0 |

1.6 Vectores y Tensores

En física, las simetrías son implementadas en los sistemas a través de las representaciones. Para ello es preciso declarar respecto a qué representación se transforman los objetos de interés como pueden ser los campos, las magnitudes cinemáticas y dinámicas, las funciones de onda, etc. Ello conduce al concepto de vector y a su generalización que son los tensores. Al indicar que un determinado objeto es un vector o un tensor, siempre debe declararse respecto a qué grupo y a qué representación de dicho grupo. Por ejemplo, el momento lineal asociado a una partícula que se mueve en dos dimensiones se transforma respecto al grupo de rotaciones $SO(2)$ según la representación de dimensión 2 construida previamente, aunque se trate de una representación reducible.

Def. 1.35 Sea G un grupo y D una representación de G . Se dice que $V_\mu, \mu = 1, \dots, n$, donde n es la dimensión de D , es un **vector respecto a la representación D** si al efectuar una transformación de simetría $g \in G$, V_μ se transforma como:

$$V_\mu \rightarrow [D(g)]_\mu^\nu V_\nu . \quad (18)$$

Def. 1.36 Se dice que $T_{\mu_1\mu_2\dots\mu_p}, \mu_i = 1, \dots, n, i = 1, \dots, p$ es un **tensor respecto a la representación D** si:

$$T_{\mu_1\mu_2\dots\mu_p} \rightarrow [D(g)]_{\mu_1}^{\nu_1} [D(g)]_{\mu_2}^{\nu_2} \dots [D(g)]_{\mu_p}^{\nu_p} T_{\nu_1\nu_2\dots\nu_p} . \quad (19)$$

Def. 1.37 Se dice que $V^\mu, \mu = 1, \dots, n$ es un **vector contravariante** respecto a la **representación** D si transforma como

$$V^\mu \rightarrow [D(g)^{-1}]^\mu_\nu V^\nu . \quad (20)$$

Se puede ver que el vector complejo conjugado de V_μ , es decir, V_μ^* transforma como un vector contravariante si la representación es unitaria.

Def. 1.38 Finalmente, podemos introducir **tensores p -covariantes y q -contravariantes**,

$$T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_q} ,$$

con propiedades de transformación mixtas. Tensores del mismo **rango** pueden sumarse. Tensores de rangos arbitrarios pueden multiplicarse dando lugar a tensores de rango superior.

Def. 1.39 Se define como **escalar** a un objeto invariante bajo una transformación de simetría. La cantidad $V_\mu W^\mu$ es un escalar. En la expresión anterior, se ha utilizado el criterio de Einstein, según el cuál debemos sumar sobre todos los índices repetidos. Adoptaremos este criterio en el resto del curso, salvo que se especifique lo contrario.

Def. 1.40 Se denomina **contracción** a la suma de un tensor en un índice covariante y otro contravariante, reduciendo el rango en una unidad para cada tipo de índice (dos en total). Por ejemplo, $T_\mu^{\mu\nu}$ es un tensor de rango 1, W_μ^μ es un escalar y,

$$T_{\mu_1 \lambda \dots \mu_p}^{\nu_1 \lambda \dots \nu_q} ,$$

es un tensor de rango $(p - 1)$ -covariante y $(q - 1)$ -contravariante.

Def. 1.41 Un **tensor invariante** es aquél que mantiene su valor al efectuar una transformación de simetría. Su invariancia depende, por lo tanto, del grupo en cuestión. En todos los casos, existe un tensor invariante trivial denominado **delta de Kronecker**, δ_μ^ν , cuyas componentes son nulas, excepto para $\mu = \nu$, en cuyo caso valen 1. Por lo tanto,

$$\delta_\mu^\nu \rightarrow [D(g)]_\mu^{\tilde{\mu}} [D(g)^{-1}]_{\tilde{\nu}}^\nu \delta_{\tilde{\mu}}^{\tilde{\nu}} = [D(g)]_\mu^{\tilde{\mu}} [D(g)^{-1}]_{\tilde{\mu}}^\nu = \delta_\mu^\nu . \quad (21)$$

Ejemplos:

1. La posición de una partícula en dos dimensiones, es un vector respecto a la representación bidimensional (real y unitaria –ortogonal–) de $SO(2)$. El tensor $\delta_{\mu\nu}$ es invariante,

$$\delta_{\mu\nu} \rightarrow [D(g)]_\mu^\lambda [D(g)]_\nu^\rho \delta_{\lambda\rho} = [D(g)]_\mu^\lambda [D(g)]_{\nu\lambda} = [D(g)]_\mu^\lambda [D(g)^{-1}]_{\lambda\nu} = \delta_{\mu\nu} ,$$

y puede utilizarse para relacionar las componentes covariantes y contravariantes de un vector, es decir, subir y bajar índices (siendo esto último una propiedad de cualquier tensor invariante $g_{\mu\nu}$),

$$x_\mu \equiv \delta_{\mu\nu} x^\nu \rightarrow \delta_{\mu\nu} [D(g)^{-1}]^\nu{}_\rho x^\rho = [D(g)^{-1}]_{\rho\mu} x^\rho = [D(g)]_{\mu\rho} x^\rho = [D(g)]^\rho{}_\mu x_\rho .$$

Con el tensor $\delta_{\mu\nu}$ coinciden las componentes cartesianas covariantes y contravariantes. Esto no ocurre si el tensor invariante es un $g_{\mu\nu}$ arbitrario como ocurre en el grupo de Lorentz de relatividad especial. En el caso tridimensional, \vec{r} es un vector respecto a la representación tridimensional de $SO(3)$. La velocidad y el momento son también vectores. Nuevamente $\delta_{\mu\nu}$ es un tensor invariante.

2. El **momento angular** es un vector respecto a la representación tridimensional de $SO(3)$. En efecto, pese a que

$$L_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu ,$$

es covariante de rango 2, su carácter antisimétrico reduce el número de componentes independientes de 9 a 3, restringiendo de este modo la representación según la cuál transforma el momento angular. De hecho, en $SO(3)$ se dispone de un tensor invariante de rango 3, el **tensor de Levi-Civita**,

$$\epsilon_{\mu\nu\rho} = \begin{cases} 0 & \text{si hay índices repetidos} \\ 1 & \text{si } \mu\nu\rho \text{ es permutación par de } 123 \\ -1 & \text{si } \mu\nu\rho \text{ es permutación impar de } 123 \end{cases} \quad (22)$$

Realizando una transformación de $SO(3)$ (parametrizada por los ángulos de Euler),

$$\epsilon_{\mu\nu\rho} \rightarrow [D(g)]_{\tilde{\mu}}{}^\mu [D(g)]_{\tilde{\nu}}{}^\nu [D(g)]_{\tilde{\rho}}{}^\rho \epsilon_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}\tilde{\rho}} = \det [D(g)] \epsilon_{\mu\nu\rho} = \epsilon_{\mu\nu\rho} ,$$

ya que las matrices de $SO(3)$ tienen determinante 1. Ahora, podemos escribir el momento angular como un vector:

$$L^\mu = \epsilon^{\mu\nu\rho} (x_\nu p_\rho - x_\rho p_\nu) , \quad (23)$$

dejando en evidencia la reducción de componentes independientes mencionada más arriba. Si el grupo es $O(3)$, el de Levi-Civita es un pseudo tensor y el momento angular un pseudo vector (transforman con un signo anómalo frente a todos los elementos de $O(3)$ con determinante -1):

$$L^\mu \rightarrow \det [D(g)] [D(g)]_\nu{}^\mu L^\nu .$$

1.7 Producto de Kronecker

Def. 1.42 Sean las representaciones irreducibles $D^{(i)}$ de G de dimensión d_i , y denotemos con $x_\mu^{(i)}$ a los vectores respecto a la representación $D^{(i)}$. Podemos pensar en las cantidades $x_\mu^{(i)} x_\nu^{(j)}$ como componentes de un vector en un espacio vectorial de dimensión $d_i d_j$, y asociar la matriz

$$\left[D^{(i \times j)}(g) \right]_{\mu\nu}^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} \equiv \left[D^{(i)}(g) \right]_{\mu}^{\tilde{\mu}} \cdot \left[D^{(j)}(g) \right]_{\nu}^{\tilde{\nu}} , \quad (24)$$

a cada elemento $g \in G$, formando una representación (unitaria, si $D^{(i)}$ y $D^{(j)}$ lo son) a la que se denomina **producto de Kronecker** de las representaciones $D^{(i)}$ y $D^{(j)}$, $D^{(i)} \times D^{(j)}$. El caracter de esta representación, viene dado por el producto de los caracteres, $\chi^{(i \times j)} = \chi^{(i)} \chi^{(j)}$.

Def. 1.43 La representación producto directo actúa sobre el **espacio vectorial producto directo** $V = V^{(i)} \otimes V^{(j)}$, dado por el conjunto de pares ordenados $v = v^{(i)} \otimes v^{(j)}$, $v^{(i)} \in V^{(i)}$ y $v^{(j)} \in V^{(j)}$. Dos operadores lineales $\mathcal{A}^{(i)}$ y $\mathcal{A}^{(j)}$ definidos respectivamente sobre $V^{(i)}$ y $V^{(j)}$, permiten definir naturalmente al operador lineal $\mathcal{A}^{(i)} \otimes \mathcal{A}^{(j)}$ sobre $V = V^{(i)} \otimes V^{(j)}$ como:

$$(\mathcal{A}^{(i)} \otimes \mathcal{A}^{(j)}) v = \mathcal{A}^{(i)} v^{(i)} \otimes \mathcal{A}^{(j)} v^{(j)} .$$

Def. 1.44 La representación $D^{(i \times j)}$ es, en general, reducible:

$$D^{(i \times j)} = D^{(i)} \times D^{(j)} = \sum_{\oplus} (ijk) D^{(k)} , \quad (25)$$

donde (ijk) es un entero positivo que indica el número de veces que aparece la representación $D^{(k)}$ en la descomposición de $D^{(i \times j)}$ en representaciones irreducibles. Estos coeficientes, si evaluamos la traza de la ecuación anterior en la identidad e de G , también relacionan la dimensionalidad de las distintas representaciones:

$$d_i d_j = \sum_k (ijk) d_k . \quad (26)$$

La obtención de estos números (Teorema 1.8), junto con la clasificación de todas las representaciones irreducibles de G , es uno de los problemas fundamentales de la teoría de representaciones. Más aún, la teoría de representaciones provee las matrices asociadas a los cambios de base entre tensores de $D^{(i \times j)}$ y aquellos de las representaciones irreducibles que la componen. Los elementos de estas matrices son conocidos como **coeficientes de Clebsch-Gordan**, fundamentales para las aplicaciones en el terreno de la física. Si la representación $D^{(i \times j)}$ es reducible, habrá una base que la deje diagonal por bloques. Los vectores de esta base, $X_\mu^{k\tau_k}$, están asociados a las representaciones irreducibles $D^{(k)}$, que aparecen un número (ijk) de

veces, $\tau_k = 1, \dots, (ijk)$. El cambio de base de los vectores que naturalmente son asociados a la representación $D^{(i \times j)}$, y estos últimos, será:

$$X_\sigma^{k_{\tau_k}} = (i\mu, j\nu | k_{\tau_k} \sigma) x_\mu^{(i)} x_\nu^{(j)} , \quad (27)$$

donde se suma sobre los índices griegos repetidos. Notar que $\sigma = 1, \dots, d_k$. Los coeficientes $(i\mu, j\nu | k_{\tau_k} \sigma)$ son denominados de **Clebsch-Gordan** y forman una matriz $d_i d_j \times d_i d_j$ que corresponde al cambio de base mencionado.

Propiedades:

i. Pueden ser invertidos (como la matriz cambio de base), para dar:

$$x_\mu^{(i)} x_\nu^{(j)} = \sum_{k_{\tau_k}} (k_{\tau_k} \sigma | i\mu, j\nu) X_\sigma^{k_{\tau_k}} . \quad (28)$$

ii. Como ambos conjuntos de coeficientes corresponden a cambios de base inversos, debe cumplirse:

$$(k'_{\tau_k} \sigma' | i\mu, j\nu) (i\mu, j\nu | k_{\tau_k} \sigma) = \delta_{kk'} \delta_{\tau_k \tau'_k} \delta_{\sigma \sigma'} , \quad (29)$$

$$\sum_{k_{\tau_k}} (i\mu', j\nu' | k_{\tau_k} \sigma) (k_{\tau_k} \sigma | i\mu, j\nu) = \delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'} . \quad (30)$$

iii. Si las representaciones son unitarias, el cambio de base ha de ser también unitario:

$$(k_{\tau_k} \sigma | i\mu, j\nu) = (i\mu, j\nu | k_{\tau_k} \sigma)^* .$$

iv. El cambio de base actúa sobre las matrices de la representación producto de Kronecker. Para verlo, se puede transformar el vector (28) con un elemento del grupo, y escribir el resultado en la base $X_\sigma^{k_{\tau_k}}$,

$$\begin{aligned} x_\mu^{(i)} x_\nu^{(j)} &\rightarrow \sum_{k_{\tau_k}} [D^{(i)}(g)]_\mu^{\tilde{\mu}} \cdot [D^{(j)}(g)]_\nu^{\tilde{\nu}} (k_{\tau_k} \tilde{\sigma} | i\tilde{\mu}, j\tilde{\nu}) X_{\tilde{\sigma}}^{k_{\tau_k}} \\ &\rightarrow \sum_{k_{\tau_k}} (k_{\tau_k} \sigma | i\mu, j\nu) [D^{k_{\tau_k}}(g)]_\sigma^{\tilde{\sigma}} X_{\tilde{\sigma}}^{k_{\tau_k}} , \end{aligned}$$

lo que, tras multiplicar por $(i\mu, j\nu | k'_{\tau_k} \sigma')$ y sumar sobre $\mu\nu$, resulta:

$$(i\mu, j\nu | k'_{\tau_k} \sigma') [D^{(i)}(g)]_\mu^{\tilde{\mu}} [D^{(j)}(g)]_\nu^{\tilde{\nu}} (k_{\tau_k} \tilde{\sigma} | i\tilde{\mu}, j\tilde{\nu}) = [D^{(k_{\tau_k})}(g)]_\sigma^{\tilde{\sigma}} \delta_{kk'} \delta_{\tau_k \tau'_k} \delta_{\sigma \sigma'} .$$

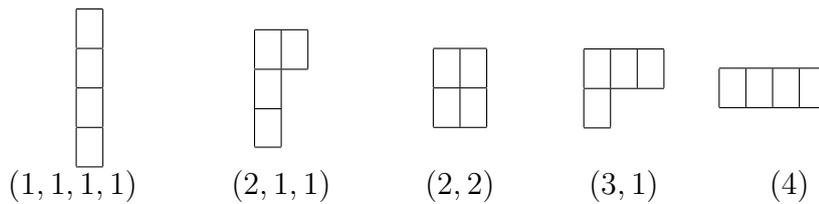
En esta última expresión, se hace evidente el carácter diagonal por bloques de la representación producto de Kronecker en la base $X_\sigma^{k_{\tau_k}}$. Existen tablas para los coeficientes de Clebsch-Gordan de los grupos más utilizados en la física. De otro modo, deben ser calculados tras un estudio detallado de las representaciones del grupo de interés.

1.8 Teoría de Representaciones de S_n

Def. 1.45 *Todo grupo finito es isomorfo a un subgrupo regular de S_n . El número de representaciones irreducibles es igual al número de clases de conjugación. La teoría de representaciones del grupo simétrico es también de gran aplicación en el estudio de los grupos de Lie.*

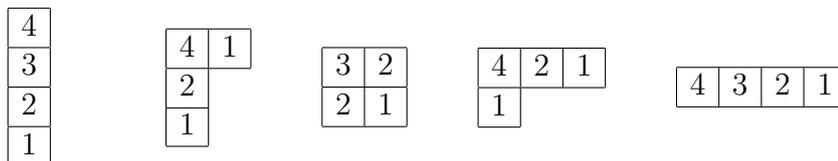
Def. 1.46 *Las clases de conjugación de S_n están dadas por la estructura de los ciclos, pudiendo denotarse por una serie de naturales λ_i tal que $\lambda_{i+1} \leq \lambda_i$. $\sum \lambda_i = n$, a la que se llama **partición ordenada de n** . Con ella podemos caracterizar cada representación irreducible de S_n .*

Def. 1.47 *Una forma gráfica de representar las particiones ordenadas de n viene dada por los **diagramas de Young**. Un diagrama de Young asociado a la partición $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ de n , contiene λ_1 cajas, seguidas de λ_2 más abajo, etc. Por ejemplo, para S_4 , se tienen:*



El uso de estos diagramas proporciona una serie de reglas para obtener información sobre la representación correspondiente: dimensión, construcción de la representación, series de Clebsch-Gordan asociadas al producto de Kronecker de representaciones, etc.

Def. 1.48 *La dimensión de la representación se determina por la **regla de los ganchos (hook)**. Se determina para cada caja del diagrama, la longitud del gancho asociado: número de cajas a la derecha más número de cajas debajo más una. Las particiones conjugadas (que resultan de intercambiar filas por columnas) tienen la misma dimensión. Por ejemplo, para S_4 ,*



y se obtiene la dimensión de la representación D , mediante:

$$\dim D = \frac{n!}{\prod_{\text{cajas}} (\text{longitudes de sus ganchos})}, \quad (31)$$

en el ejemplo anterior:

$$\frac{4!}{4.3.2.1} = 1 \quad , \quad \frac{4!}{4.1.2.1} = 3 \quad , \quad \frac{4!}{3.2.2.1} = 2 \quad , \quad \frac{4!}{4.2.1.1} = 3 \quad , \quad \frac{4!}{4.3.2.1} = 1 \quad .$$

Def. 1.49 *La construcción de una determinada representación se hace mediante el uso de los **operadores de Young**. Se colocan números del 1 al n en el tablero, y se construye con cada fila un simetrizador y con cada columna un antisimetrizador (entendiendo a estos como operadores que actúan sobre, por ejemplo, las etiquetas de un conjunto de partículas idénticas). El producto de ellos proporciona un elemento de la base del espacio vectorial sobre el que actúa la representación. La composición de todos los elementos del grupo sobre el operador de Young, \mathcal{Y} , permite obtener el resto de los elementos de la base (que corresponden a otras asignaciones de números en el tablero), y define en sí mismo una representación del grupo S_n de la dimensión apropiada. Se obtienen elementos, tantos como la dimensión de la representación.*

Ejemplo:

Consideremos el grupo S_3 , y construyamos sus distintas representaciones irreducibles utilizando los diagramas de Young.

$\Gamma^{(1)}$. La representación irreducible $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$ sólo tiene un simetrizador,

$$\mathcal{P} = [e + (12) + (13) + (23) + (123) + (132)]$$

y ningún antisimetrizador. Su operador de Young es, entonces, $\mathcal{Y} \equiv \mathcal{P}$. Ahora,

$$e \mathcal{Y} = (123) \mathcal{Y} = (132) \mathcal{Y} = (12) \mathcal{Y} = (23) \mathcal{Y} = (13) \mathcal{Y} = \mathcal{Y} \quad ,$$

es decir, $g \mathcal{Y} = \mathcal{Y}$, que debe interpretarse como $\Gamma^{(1)}(g) \mathcal{Y} = \mathcal{Y}$, o sea, $\Gamma^{(1)}(g) = 1$ para todos los elementos del grupo. Corresponde, evidentemente, a la representación trivial $D^{(1)}$.

$\Gamma^{(2)}$. La representación $\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$, tiene sólo un antisimetrizador,

$$\mathcal{Q} = [e - (12) - (13) - (23) + (123) + (132)]$$

(notar la signatura de la permutación). El operador de Young correspondiente es $\mathcal{Y} \equiv \mathcal{Q}$. Entonces,

$$e \mathcal{Q} = (123) \mathcal{Q} = (132) \mathcal{Q} = \mathcal{Q} \quad (12) \mathcal{Q} = (13) \mathcal{Q} = (23) \mathcal{Q} = -\mathcal{Q} \quad ,$$

tratándose de la representación de dimensión 1, $D^{(2)}$, que asigna a cada elemento su paridad o signatura.

$\Gamma^{(3)}$. Finalmente, la representación $\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$ tiene un simetrizador \mathcal{P} y un antisimetrizador \mathcal{Q} ,

$$\mathcal{P} = [e + (12)] \quad \mathcal{Q} = [e - (13)] ,$$

y, por lo tanto, el operador de Young es:

$$\mathcal{Y} = \mathcal{Q} \mathcal{P} = [e - (13)] [e + (12)] = [e + (12) - (13) - (123)] .$$

Actuando con (12), por ejemplo, se obtiene un nuevo operador al que denominaremos \mathcal{X} , (12) $\mathcal{Y} \equiv \mathcal{X}$. Como la dimensión de esta representación es 2, todos los demás productos han de poder expresarse en términos de \mathcal{X} y de \mathcal{Y} . En efecto,

$$\begin{array}{lll} (13) \mathcal{Y} = -\mathcal{Y} & (23) \mathcal{Y} = \mathcal{Y} - \mathcal{X} & (123) \mathcal{Y} = \mathcal{X} - \mathcal{Y} \\ (132) \mathcal{Y} = -\mathcal{X} & (12) \mathcal{X} = \mathcal{Y} & (13) \mathcal{X} = \mathcal{X} - \mathcal{Y} \\ (23) \mathcal{X} = -\mathcal{X} & (123) \mathcal{X} = -\mathcal{Y} & (132) \mathcal{X} = \mathcal{Y} - \mathcal{X} , \end{array}$$

es decir que, considerando matrices que actúan hacia la izquierda, la representación bidimensional está dada por

$$\begin{array}{lll} \Gamma^{(3)}(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \Gamma^{(3)}(12) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \Gamma^{(3)}(13) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Gamma^{(3)}(23) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} & \Gamma^{(3)}(123) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \Gamma^{(3)}(132) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Se trata de una representación irreducible claramente no unitaria, equivalente a la representación irreducible (unitaria), $D^{(3)}$, tabulada anteriormente. De hecho, es fácil probar que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix} ,$$

es la que relaciona ambas representaciones, $D^{(3)} = A \Gamma^{(3)} A^{-1}$.

Análogamente, por ejemplo, la representación $\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}$ tiene un operador de Young, $\mathcal{Y} = [e - (13)] [e - (24)] [e + (12)] [e + (34)]$, a partir del cuál se obtiene, actuando con los elementos del grupo, la representación autoconjugada bidimensional de S_4 .

Nota: El uso de los diagramas o tableros de Young en la teoría de representaciones del grupo simétrico es muy amplio, y aquí sólo se pretende mostrar algunas de las aplicaciones más sencillas. Por ejemplo, los tableros de Young permiten calcular de un modo llamativamente simple el caracter de todas las clases conjugadas de cualquier representación irreducible de S_n (ver, por ejemplo, el capítulo 7 del libro de Hamermesh, “Group Theory and its application to physical problems”).

1.9 Espectro vibracional de una molécula

Sea un sistema clásico descrito por N coordenadas q_1, q_2, \dots, q_N a las que apilaremos en un vector \mathbf{q} . Las vibraciones pequeñas, en torno a la posición de equilibrio estable ($\mathbf{q} = \mathbf{0}$, tal que $V(\mathbf{q}) = 0$), son descritas mediante el potencial armónico

$$V = \frac{1}{2} \sum_{m,n=1}^N q_m F_{mn} q_n \equiv \frac{1}{2} \mathbf{q}^t \mathbf{F} \mathbf{q} ,$$

enteramente dado por la matriz \mathbf{F} . El lagrangiano del sistema es,

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^t \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^t \mathbf{F} \mathbf{q} ,$$

y sus ecuaciones de movimiento,

$$\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{F} \mathbf{q} = 0 .$$

Consideremos un modo normal de vibración¹ (lo que corresponde a un movimiento en el que todas las coordenadas oscilan con la misma frecuencia ω_m),

$$\mathbf{q}_m = \mathbf{c}_m \cos(\omega_m t + \alpha_m) ,$$

donde \mathbf{c}_m es un vector columna real y constante, que debe ser autovector de \mathbf{F} ,

$$\mathbf{F} \mathbf{c}_m = \omega_m^2 \mathbf{c}_m ,$$

y ω_m y α_m son dos constantes reales. La matriz \mathbf{F} es diagonalizable (por ser simétrica), y $\lambda_m = \omega_m^2$ son sus autovalores, posiblemente degenerados. La solución más general posible, se escribe simplemente como una superposición de los modos normales,

$$\mathbf{q} = \sum_{m=1}^N A_m \mathbf{c}_m \cos(\omega_m t + \alpha_m) ,$$

con $2N$ constantes de movimiento (A_m y α_m) que pueden fijarse a partir de las condiciones iniciales sobre \mathbf{q} y $\dot{\mathbf{q}}$. Escrito en coordenadas normales, el Lagrangiano refleja la dinámica de un conjunto de osciladores desacoplados. El problema clave, pues, está en la diagonalización de la matriz \mathbf{F} , algo generalmente complicado, aún en el caso más sencillo en que se considera a los átomos unidos por fuelles.

¹No todos los modos normales corresponden a vibraciones de la molécula. En todos los casos, tres de los grados de libertad están asociados al movimiento de traslación global de la molécula (en tres dimensiones), mientras que tres modos normales lo están al movimiento de rotación global. Estas operaciones no están acompañadas de un cambio energético, ya que cada átomo permanece en la posición de equilibrio del potencial generado por el resto de los componentes de la molécula. Estos movimientos son conocidos como **modos cero**, dado que se trata de “vibraciones” de frecuencia nula.

En general, el potencial V , y por lo tanto \mathbf{F} , son muy difíciles de calcular a partir de propiedades microscópicas. Sin embargo, el estudio de las simetrías espaciales que resultan de la disposición geométrica de los átomos, permite extraer mucha información sobre el espectro vibracional, aún sin conocer el valor exacto de V . Una transformación de coordenadas, $\mathbf{q} \rightarrow \Gamma\mathbf{q}$ es una simetría si $\Gamma\Gamma^t = 1$ y $[\Gamma, \mathbf{F}] = 0$. Dos estados ligados por Γ tienen la misma energía. El conocimiento de un conjunto de matrices que conmutan con la matriz \mathbf{F} –como ocurre con las transformaciones de simetría–, como veremos en el ejemplo de la molécula diédrica, simplificará de una manera considerable el proceso de diagonalización de esta matriz.

Consideremos, entonces, una molécula de amoníaco, NH_3 , cuya disposición espacial corresponde a un triángulo equilátero con un átomo de hidrógeno en cada vértice, y un átomo de nitrógeno ubicado fuera del plano del triángulo, sobre la intersección de todas sus mediatrices. El grupo de simetría de la configuración de equilibrio de esta molécula, no es otro que D_3 . El vector \mathbf{q} tendrá dimensión 12, al estar compuesto por cuatro vectores tridimensionales \mathbf{r}_k correspondientes a cada uno de los átomos (supongamos que el vector \mathbf{r}_4 es el que corresponde al nitrógeno). El resultado de aplicar las transformaciones de D_3 a las posiciones de equilibrio de la molécula constituye una representación de dimensión 4, $\mathbf{p}(g)$ que actúa sobre las etiquetas de los átomos. Por ejemplo,

$$\begin{array}{llll} \mathbf{r}_1^{(0)} = \mathbf{p}(c)\mathbf{r}_3^{(0)} & \mathbf{r}_2^{(0)} = \mathbf{p}(c)\mathbf{r}_1^{(0)} & \mathbf{r}_3^{(0)} = \mathbf{p}(c)\mathbf{r}_2^{(0)} & \mathbf{r}_4^{(0)} = \mathbf{p}(c)\mathbf{r}_4^{(0)}, \\ \mathbf{r}_1^{(0)} = \mathbf{p}(c^2)\mathbf{r}_2^{(0)} & \mathbf{r}_2^{(0)} = \mathbf{p}(c^2)\mathbf{r}_3^{(0)} & \mathbf{r}_3^{(0)} = \mathbf{p}(c^2)\mathbf{r}_1^{(0)} & \mathbf{r}_4^{(0)} = \mathbf{p}(c^2)\mathbf{r}_4^{(0)}, \\ \mathbf{r}_1^{(0)} = \mathbf{p}(x)\mathbf{r}_2^{(0)} & \mathbf{r}_2^{(0)} = \mathbf{p}(x)\mathbf{r}_1^{(0)} & \mathbf{r}_3^{(0)} = \mathbf{p}(x)\mathbf{r}_3^{(0)} & \mathbf{r}_4^{(0)} = \mathbf{p}(x)\mathbf{r}_4^{(0)}, \end{array}$$

etcétera. Es decir,

$$\mathbf{p}(g) = \begin{pmatrix} \Gamma(g) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde $\Gamma(g)$ es la representación tridimensional natural de $S_3 \sim D_3$. El desplazamiento de cada átomo respecto de su posición de equilibrio, $\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_k^{(0)}$, transforma, frente a una rotación o una reflexión, según la representación tridimensional que llamaremos \mathbf{R} ,

$$\mathbf{R}(g) = \begin{pmatrix} D^{(3)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde $D^{(3)}$ es la representación irreducible bidimensional de D_3 que actúa sobre las componentes de los vectores en el plano de los átomos de hidrógeno. Al realizar una operación de simetría, estamos transformando al mismo tiempo las etiquetas (es decir, cambiando los átomos de lugar) y su desplazamiento relativo a la posición de equilibrio.

Está claro, entonces, que la representación que actúa sobre el vector \mathbf{q} definido más arriba, es el producto de Kronecker, $\Gamma^d = \mathbf{p} \times \mathbf{R}$, y se conoce como **representación**

desplazamiento, un homomorfismo de D_3 en un conjunto de seis matrices 12×12 de la forma, por ejemplo,

$$\Gamma^d(c) = \mathbf{p}(c) \times \mathbf{R}(c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{R}(c) & 0 \\ \mathbf{R}(c) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}(c) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{R}(c) \end{pmatrix},$$

que conmutan con la matriz \mathbf{F} . El caracter de esta representación, χ^{Γ^d} , se obtiene del producto de los caracteres de \mathbf{p} y \mathbf{R} ,

$$\chi^{\Gamma^d}(K_1) = 12 \quad \chi^{\Gamma^d}(K_2) = 0 \quad \chi^{\Gamma^d}(K_3) = 2,$$

de donde se deduce fácilmente que

$$\Gamma^d \sim 3D^{(1)} \oplus D^{(2)} \oplus 4D^{(3)}.$$

La matriz \mathbf{F} resulta diagonal por bloques con la misma estructura de Γ^d y en la misma base en que ésta adopta dicha forma². Más aún, cada autovalor de \mathbf{F} puede ser asociado con una representación irreducible de D_3 , y toda vez que la dimensión de dicha representación sea $d > 1$, el autovalor será d -degenerado. Por lo tanto, para la molécula de amoníaco, existen 3 autovalores no-degenerados correspondientes a $D^{(1)}$, un autovalor no-degenerado correspondiente a $D^{(2)}$, y 4 autovalores doblemente degenerados que corresponden a la representación irreducible bidimensional $D^{(3)}$. Recordar que los autovalores de \mathbf{F} no son otra cosa que las frecuencias de los modos normales de vibración. El valor preciso de estos autovalores, por supuesto, requiere del conocimiento de \mathbf{F} .

Debemos descartar aún, los 6 modos cero que corresponden a “vibraciones” globales del sistema. Es posible encontrar sistemáticamente las representaciones del grupo para las cuales los modos cero correspondientes a las rotaciones y traslaciones globales forman una base (ver, por ejemplo, el capítulo 7 del libro de Cornwell, “Group Theory in Physics”, volume I). En el caso de la molécula de amoníaco, estas son:

$$\Gamma^{trasl} \sim D^{(1)} \oplus D^{(3)} \quad \Gamma^{rotac} \sim D^{(2)} \oplus D^{(3)}.$$

²Este resultado se deduce a partir de una serie de propiedades algebraicas:

- i. Dos vectores propios \mathbf{u} y \mathbf{v} de un operador hermítico (ortogonal), \mathbf{A} , correspondientes a dos valores propios diferentes, son ortogonales.
- ii. Sean \mathbf{A} y \mathbf{B} dos operadores lineales que conmutan, $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0$. Si \mathbf{u} es un autovector de \mathbf{A} , $\mathbf{B}\mathbf{u}$ es otro autovector propio de \mathbf{A} con el mismo autovalor, es decir, todo subespacio propio de \mathbf{A} es globalmente invariante bajo la acción de \mathbf{B} .
- iii. Sea \mathbf{A} un operador lineal hermítico, y \mathbf{B} una matriz que conmuta con \mathbf{A} . Si \mathbf{u}_1 y \mathbf{u}_2 son dos autovectores de \mathbf{A} con autovalores diferentes, $\mathbf{B}_{12} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{B}\mathbf{u}_2) = 0$.

Entonces, el espectro vibracional de la molécula de amoníaco contiene 2 autofrecuencias no-degeneradas (correspondientes a $D^{(1)}$) y 2 autofrecuencias doblemente degeneradas (correspondientes a $D^{(3)}$). Notar, finalmente, que la constitución de los modos normales en términos de las coordenadas cartesianas de los átomos, se obtiene a partir de los coeficientes de Clebsch–Gordan del producto de Kronecker Γ^d .

2 Grupos de Lie

Atendiendo a su naturaleza topológica, cabe clasificar a los grupos de orden infinito bien como *grupos discretos infinitos*, si sus elementos pueden enumerarse (e.g. $(Z, +)$), o bien *grupos continuos*, si, en cambio, sus elementos pueden considerarse puntos de un espacio continuo (e.g. $(R, +)$ y $SO(2)$). Siendo más explícitos, diremos que los elementos de un grupo continuo G pueden parametrizarse mediante un conjunto de variables reales, $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(\mathbf{x})$ (en los ejemplos anteriores, $x \in R$ o el ángulo θ de las rotaciones planas, respectivamente). En lo que resta del curso nos concentraremos en un subconjunto de estos grupos, que tiene un papel preponderante en diversos campos de la física.

2.1 Grupos de Lie

Def. 2.1 *Se dice que el conjunto de variables reales (x_1, x_2, \dots, x_n) es **esencial**, si no existe un subconjunto menor de ellas que etiquete a todos los elementos del grupo. En este caso diremos que la **dimensión del grupo** es n .*

Ejemplo:

Si consideramos el grupo de transformaciones $x' = x + a + b$, está claro que los dos parámetros a y b no son esenciales, ya que podemos hallar un único parámetro c que, al ser variado continuamente, genera todas las transformaciones del grupo (desplazamientos en una dimensión). Para cualquier valor de c , tenemos infinitos valores de a y b –que satisfacen $a + b = c$ –, de modo que generan la misma transformación.

Def. 2.2 *Al componer dos elementos se tiene que*

$$g(\mathbf{x})g(\mathbf{y}) = g(\mathbf{z}) ,$$

en donde $\mathbf{z} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Es decir que la tabla de multiplicación de un grupo continuo viene dada por n funciones reales F_i de $2n$ variables x_k e y_k . Las propiedades de grupo imponen restricciones sobre las posibles funciones F_i . La más severa de ellas es la que proviene de la asociatividad,

$$\begin{aligned} (g(\mathbf{x})g(\mathbf{y}))g(\mathbf{z}) &= g(\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))g(\mathbf{z}) = g(\mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})), \mathbf{z}) , \\ g(\mathbf{x})(g(\mathbf{y})g(\mathbf{z})) &= g(\mathbf{x})g(\mathbf{F}(\mathbf{y}, \mathbf{z})) = g(\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{F}(\mathbf{y}, \mathbf{z}))) , \end{aligned}$$

y por lo tanto, $F_i(\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{z}) = F_i(\mathbf{x}, \mathbf{F}(\mathbf{y}, \mathbf{z}))$ para todos los valores de $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$. La existencia del elemento inverso lleva a la aparición de una segunda función $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$, tal que $g(\mathbf{x})g(\mathbf{y}) = e$.

Def. 2.3 Cuando el espacio formado por los posibles valores de los parámetros \mathbf{x} es un espacio topológico y las funciones \mathbf{F} y \mathbf{h} son continuas se dice que G es un **grupo topológico**.

Def. 2.4 Un **grupo de Lie** es un grupo continuo en el que las funciones \mathbf{F} y \mathbf{h} anteriormente definidas son **analíticas** (continuas e infinitamente derivables).

Ejemplos:

1. $(\mathbf{R}, +)$. La variable $x \in \mathbf{R}$ puede ser utilizada para parametrizar el grupo. Las funciones $F(x, y) = x + y$ y $g(x) = -x$ son analíticas.
2. $SO(2)$, parametrizado por la variable $\theta \in [0, 2\pi]$, donde $F(\theta, \phi) = \theta + \phi \pmod{2\pi}$ y $g(\theta) = -\theta \pmod{2\pi}$. En general, el grupo de rotaciones en \mathbf{R}^n , $SO(N)$, es un grupo de Lie.
3. $GL(N, \mathbf{C})$. Su dimensión real es $d = 2N^2$. Los elementos de $GL(N, \mathbf{C})$ son la representación matricial de un operador lineal actuando sobre el espacio vectorial V de dimensión compleja N , en una determinada base. La mayoría de los grupos de Lie que encuentran aplicación en física son subgrupos de $GL(N, \mathbf{C})$. Por ejemplo, $GL(N, \mathbf{R})$, es el grupo de la relatividad general.
4. $SL(N, \mathbf{C})$. Su dimensión real es $2(N^2 - 1)$. Tiene su versión real, $SL(N, \mathbf{R})$, de dimensión real $N^2 - 1$.
 $U(N)$. La condición de unitariedad restringe la dimensión real del grupo a N^2 . En el caso de $SU(N)$, la condición adicional sobre el determinante, reduce la dimensión real a $N^2 - 1$.
 $O(N)$. Su dimensión real es igual a $\frac{1}{2}N(N - 1)$, al igual que la de $SO(N)$.
5. **Grupo pseudo-ortogonal** $O(M, N)$. Sea la matriz diagonal de dimensión $d = M + N$

$$\eta = \text{diag}(\overbrace{-1, -1, \dots, -1}^M, \overbrace{1, 1, \dots, 1}^N).$$

Una matriz Λ pertenece al grupo pseudo-ortogonal $O(M, N)$, si es una matriz de $GL(d, \mathbf{R})$ que satisface la condición adicional

$$\Lambda^t \eta \Lambda = \eta.$$

Dicha condición está compuesta por $\frac{1}{2}d(d + 1)$ ecuaciones independientes, por lo que $O(M, N)$ tiene dimensión $\frac{1}{2}d(d - 1)$. Obsérvese que $O(M)$ es un caso particular de este grupo. Podemos definir $SO(M, N)$ en forma análoga.

6. **Grupo de Galileo.** Está formado por las transformaciones de coordenadas que relacionan sistemas inerciales entre sí: $\vec{r}' = R(\vec{n})\vec{r} + \vec{v}t$ y $t' = t$. En notación matricial, expresamos un elemento del grupo:

$$G(\vec{n}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} R(\vec{n}) & \vec{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (32)$$

donde \vec{n} y \vec{v} son 6 parámetros que especifican una rotación genérica de los ejes (de ángulo $|\vec{n}|$ en la dirección \hat{n}), y la velocidad de uno de los sistemas inerciales relativa al otro. $R(\vec{n})$, claro está, es una matriz de $SO(3)$.

Def. 2.5 *Un subconjunto de un grupo de Lie, que es a su vez grupo de Lie, se dice que forma un **subgrupo de Lie**.*

Def. 2.6 *Se denomina **componente conexa** de un grupo de Lie, G , al conjunto maximal de elementos $\{g\} \subset G$, que pueden ser relacionados entre sí mediante una variación continua de las variables que parametrizan el grupo.*

Ejemplos:

1. $(\mathbf{R} - \{0\}, \times)$, se divide en dos componentes conexas: \mathbf{R}^+ (que contiene, en particular, a la identidad) y \mathbf{R}^- .
2. $O(N)$, tiene dos componentes conexas, formadas por aquellas matrices cuyo determinante es igual a $+1$ y aquellas otras con determinante igual a -1 . $SO(N)$ no es otra cosa que la componente conexa que contiene a la identidad $e = 1$ (subgrupo conexo de $O(N)$).

Def. 2.7 *Un grupo de Lie de dimensión N , con un número finito de componentes conexas, es **compacto**, si y sólo si existe un conjunto de variables y_1, \dots, y_n que parametrizan este grupo completamente, y que varían dentro de intervalos cerrados y acotados $a_i \leq y_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n$. Para los grupos compactos puede definirse la medida invariante de integración $\int_G d\mu(g)$, que permite extender los resultados obtenidos previamente en la teoría de representaciones de grupos finitos.*

Ejemplo: Los grupos $SU(N)$, $U(N)$, $SO(N)$ y $O(N)$ son compactos, mientras que $GL(N)$, $SL(N)$ y $SO(N, M)$ no lo son.

Def. 2.8 *Una **curva analítica** en G es una aplicación continua y diferenciable del intervalo $t \in [0, t_0) \subset \mathbf{R}$ en el grupo $t \rightarrow g(t) \in G$,*

$$g(t) \equiv g(x_1(t), \dots, x_d(t)) \text{ , } \quad \text{tal que } g(0) = e \text{ .}$$

Def. 2.9 Dado un grupo G parametrizado por las coordenadas x_1, \dots, x_d , denominaremos **curvas coordenadas** al conjunto de d curvas analíticas de la forma

$$x_i(t) = t \quad x_j = 0 \quad , \quad j \neq i .$$

Def. 2.10 En un grupo matricial G , se define el **vector tangente** (en la identidad) de una curva analítica $g(t)$, como la matriz

$$L = \left. \frac{dg(t)}{dt} \right|_{t=0} .$$

Se llama al vector tangente, **generador infinitesimal**, ya que podemos expandir $g(t)$ en torno a $t = 0$,

$$g(t) = e + tL + \frac{1}{2}t^2L' + O(t^3) \quad (33)$$

donde $L' = d^2g(t)/dt^2|_{t=0}$, etc. De este modo, cualquier elemento en el entorno de la identidad puede obtenerse a partir del conocimiento de L . Los generadores infinitesimales asociados a las curvas coordenadas, se definen como los vectores tangentes a cada una de ellas,

$$L_i = \left. \frac{dg(t)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{dg(0, \dots, x_i = t, \dots, 0)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial g(\vec{x})}{\partial x_i} \right|_{x_i=0} .$$

Son matrices de la misma dimensión que las matrices que definen a los elementos del grupo.

Ejemplo: Consideremos una matriz genérica $M \in GL(2, \mathbf{R})$ en el entorno de la identidad,

$$M = \begin{pmatrix} 1 + x_1 & x_2 \\ x_3 & 1 + x_4 \end{pmatrix} .$$

Los generadores infinitesimales $\{L_i\}$ asociados a las curvas coordenadas de $GL(2, \mathbf{R})$, resultan entonces:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Teorema 2.1 El conjunto de todos los vectores tangentes a cualquier curva analítica $g(t) \in G$, forma un espacio vectorial real \mathcal{G} , de dimensión d igual a la del grupo. Llamamos a este espacio, el **espacio tangente**. Los elementos L_i tangentes a las curvas coordenadas forman una base de \mathcal{G} . De hecho, $L = \sum \dot{x}_i(0)L_i$.

Teorema 2.2 Si L y M son los vectores tangentes a las curvas analíticas $f(t)$ y $g(t)$ del grupo G , respectivamente, entonces $N = [L, M] = LM - ML$ es el vector tangente a la curva analítica $h(t) \in G$ donde $h(t^2) \equiv f(t)g(t)f^{-1}(t)g^{-1}(t)$.

Dem. A partir de las definiciones anteriores, podemos escribir:

$$\begin{aligned} f(t) &= e + tL + \frac{1}{2}t^2L' + \dots \\ g(t) &= e + tM + \frac{1}{2}t^2M' + \dots \\ f^{-1}(t) &= e - tL + t^2(L^2 - \frac{1}{2}L') + \dots \\ g^{-1}(t) &= e - tM + t^2(M^2 - \frac{1}{2}M') + \dots \end{aligned}$$

y, por lo tanto:

$$h(t^2) \equiv f(t)g(t)f^{-1}(t)g^{-1}(t) = e + t^2[L, M] + \dots$$

por lo que $[L, M]$ es el vector tangente a la curva $h(t) \in G$.

Nota: Este sorprendente resultado es de suma importancia: asocia a los Grupos de Lie con el estudio de espacios vectoriales de matrices en los que el conmutador es una operación interna. Se alude usualmente a este hecho diciendo que la estructura local (en el entorno de la identidad) de un grupo de Lie corresponde a un álgebra de Lie.

2.2 Álgebras de Lie

La estructura analítica de los grupos de Lie permite estudiar al grupo en la vecindad de un punto del espacio de parámetros. La estructura local que corresponde a esta descripción es un álgebra (de Lie). Conocida el álgebra, podemos reproducir el comportamiento del grupo en el entorno de dicho punto: el álgebra no contiene información de los aspectos globales del (espacio de parámetros del) grupo.

Def. 2.11 *Un álgebra de Lie \mathcal{L} de dimensión $d \geq 1$, es un espacio vectorial de dimensión d , y con cuerpo Λ , dotado de una ley de composición bilineal llamada corchete de Lie, $[\cdot, \cdot] : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$, definida para todo par $x, y \in \mathcal{L}$, y que satisface*

- i. $[x, y] \in \mathcal{L}$.
- ii. $[x, y] = -[y, x]$.
- iii. $[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z]$, $\alpha, \beta \in \Lambda$.
- iv. $[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$ (**Identidad de Jacobi**).

En el caso particular del espacio vectorial tangente \mathcal{G} , el corchete de Lie viene dado por el conmutador de matrices. La imposición de las propiedades anteriores, y especialmente la identidad de Jacobi, restringen de forma dramática las posibilidades de construir álgebras de Lie de dimensión finita.

Def. 2.12 El álgebra de Lie viene especificada por un conjunto de d^3 números f^k_{ij} , denominados **constantes de estructura** con respecto a la base $\{L_i\}$ $i = 1, \dots, d$, que se definen según la siguiente expresión

$$[L_i, L_j] = \sum_{k=1}^d f^k_{ij} L_k . \quad (34)$$

Estos números no son independientes. Verifican, como consecuencia de (i) y (iv),

$$f^k_{ij} = -f^k_{ji} , \\ f^m_{ik} f^k_{ij} + f^m_{ik} f^k_{jl} + f^m_{jk} f^k_{li} = 0 .$$

Teorema 2.3 A cada grupo de Lie lineal (requisito que conlleva el que tenga una representación matricial fiel) G , le corresponde un álgebra de Lie \mathcal{G} de la misma dimensión. De forma más precisa, si \mathcal{G} tiene dimensión d , entonces los generadores infinitesimales L_1, \dots, L_d forman una base de \mathcal{G} .

Def. 2.13 Las condiciones que restringen la forma genérica de los elementos de un álgebra de Lie \mathcal{G} , están asociadas a aquellas correspondientes al grupo de Lie G , a través de la expresión infinitesimal de sus elementos.

Ejemplos:

1. El grupo $SL(N, \mathbf{C})$ se define mediante la condición extra $\det g = 1$ impuesta a matrices de $GL(N, \mathbf{C})$. Entonces, los elementos de su álgebra de Lie, $sl(N, \mathbf{C})$, deben verificar

$$\det g(t) = \det(e + tL + O(t^2)) = 1 + t \operatorname{tr} L + O(t^2) = 1 \Rightarrow \operatorname{tr} L = 0 ,$$

es decir: $sl(N, \mathbf{C}) = \{L \mid \operatorname{tr} L = 0\}$.

2. El grupo ortogonal, $O(N)$, está definido por $g^t = g^{-1}$, lo que infinitesimalmente resulta

$$g^t = e + tL^t + O(t^2) = e - tL + O(t^2) = g^{-1} ,$$

es decir, $L^t = -L$. Notar que estas matrices tienen traza nula, por lo que el álgebra resulta $so(N)$ y es común a los grupos $O(N)$ y $SO(N)$. Esto se debe a que el álgebra de Lie da cuenta de la estructura local del grupo en el entorno de la identidad: varios grupos de Lie pueden compartir el mismo álgebra, encontrándose entonces que se diferencian en la estructura global.

Tabla: Algunos Grupos y Algebras de Lie

| G | \mathcal{G} | $L \in \mathcal{G}$ | d |
|---------------------|---------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|
| $GL(N, \mathbf{C})$ | $gl(N, \mathbf{C})$ | — | $2N^2$ |
| $GL(N, \mathbf{R})$ | $gl(N, \mathbf{R})$ | L real | N^2 |
| $SL(N, \mathbf{C})$ | $sl(N, \mathbf{C})$ | $\text{tr } L = 0$ | $2N^2 - 2$ |
| $SL(N, \mathbf{R})$ | $sl(N, \mathbf{R})$ | L real; $\text{tr } L = 0$ | $N^2 - 1$ |
| $U(N)$ | $u(N)$ | $L^+ = -L$ | N^2 |
| $SU(N)$ | $su(N)$ | $L^+ = -L$; $\text{tr } L = 0$ | $N^2 - 1$ |
| $O(N)$ | $so(N)$ | $L^+ = -L$; L real | $\frac{1}{2}N(N - 1)$ |
| $SO(N)$ | $so(N)$ | $L^+ = -L$; L real | $\frac{1}{2}N(N - 1)$ |
| $O(p, q)$ | $so(p, q)$ | $(\eta L)^t = -\eta L$, L real | $\frac{1}{2}N(N - 1)$, $N = p + q$ |
| $SO(p, q)$ | $so(p, q)$ | $(\eta L)^t = -\eta L$, L real | $\frac{1}{2}N(N - 1)$, $N = p + q$ |

Def. 2.14 *Un subgrupo monoparamétrico de un grupo de Lie G , es un subgrupo de Lie que consta de elementos $g(t)$ parametrizados por una única variable t , tal que $g(t)g(s) = g(t+s)$. Todo subgrupo monoparamétrico es abeliano. Además, $g(0) = e$. Ejemplo: $SO(2) \subset SU(2)$.*

Teorema 2.4 *Todo subgrupo monoparamétrico de un grupo de Lie G matricial, puede ser generado mediante la exponenciación de una matriz L perteneciente al álgebra de Lie \mathcal{G} . Sean $g(t)$ las matrices del subgrupo monoparamétrico de G , entonces*

$$g(t) = e^{tL} \quad \text{donde} \quad L = \left. \frac{dg(t)}{dt} \right|_{t=0} = \dot{g}(0) .$$

Def. 2.15 *Se define el mapa exponencial, como aquél que permite construir elementos del grupo de Lie a partir de su álgebra:*

$$\begin{aligned} \exp : \mathcal{G} &\longrightarrow G \\ L &\longrightarrow e^{tL} . \end{aligned} \tag{35}$$

De hecho, lo que hemos obtenido es una curva analítica $g(t)$ de la cuál L es el vector tangente. Los elementos de esta curva constituyen un subgrupo monoparamétrico.

Teorema 2.5 *Todo elemento de un grupo de Lie, perteneciente a la componente conexa de la identidad, puede ser expresado como un producto finito de exponenciales de elementos de su álgebra de Lie real \mathcal{G} . Este teorema es válido para grupos compactos y no-compactos.*

Ejemplo:

Sea $g \in SO(2)$. El álgebra $so(2)$ está generada por matrices reales antisimétricas $L^t = -L$ y es unidimensional. Por lo tanto, podemos tomar a la siguiente matriz

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

como base de $so(2)$. Es decir, cualquier elemento de $so(2)$ puede escribirse como θL , $\theta \in [0, 2\pi)$. Entonces, un elemento genérico de $SO(2)$ resulta de la forma

$$\begin{aligned} g(\theta) &= e^{\theta L} \\ &= I + \theta L + \frac{1}{2}\theta^2 L^2 + \frac{1}{3!}\theta^3 L^3 + \frac{1}{4!}\theta L^4 + \dots \\ &= \cos \theta I + \operatorname{sen} \theta L \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.3 Representaciones de Grupos y Álgebras de Lie

Def. 2.16 Una **representación analítica** de un grupo de Lie G , es una representación $D(g)$, automorfismo de un espacio vectorial, que verifica que $\forall g(x_1, \dots, x_d)$ en una vecindad de la identidad, los elementos de matriz de $D(g(x_1, \dots, x_d))$ son funciones analíticas de x_1, \dots, x_d .

Def. 2.17 Sea \mathcal{L} un álgebra de Lie abstracta. Diremos que \mathcal{T} es una **representación lineal** m -dimensional de \mathcal{L} , si es un homomorfismo lineal del álgebra sobre el conjunto de operadores lineales definidos sobre un espacio vectorial V de dimensión m . Se tiene, para cada $L \in \mathcal{L}$ un operador lineal $\mathcal{T}(L)$ que verifica:

(i) *Linealidad:* $\mathcal{T}(\alpha L + \beta M) = \alpha \mathcal{T}(L) + \beta \mathcal{T}(M)$.

(ii) *Homomorfismo:* $\mathcal{T}([L, M]) = [\mathcal{T}(L), \mathcal{T}(M)]$.

Nota: En una base arbitraria (que tomaremos ortonormal), la representación asigna a cada elemento del álgebra una matriz (en general, un operador matricial) m -dimensional, $\mathcal{D}(L)_{\alpha\beta}$. Algunas nociones, como la equivalencia de representaciones, o la reducibilidad se definen de forma totalmente análoga a la de los grupos (para todos los elementos de una base del álgebra de Lie). Los dos lemas de Schur se formulan exactamente de la misma forma que en el caso de grupos, pero poniendo $\forall L \in \mathcal{L}$ donde decía $\forall g \in G$.

Def. 2.18 Un **álgebra de Lie abeliana** es aquella para la cual $[L, M] = 0$ para todo $L, M \in \mathcal{L}$. Toda representación irreducible de un álgebra de Lie abeliana es unidimensional.

Teorema 2.6 Sea D una representación m -dimensional de un grupo de Lie lineal G , cuya álgebra de Lie real es \mathcal{G} .

(i) Existe una representación m -dimensional \mathcal{D} , definida para todo elemento $L \in \mathcal{G}$ mediante

$$\mathcal{D}(L) = \left. \frac{d}{dt} D(e^{tL}) \right|_{t=0} .$$

(ii) Para todo $L \in \mathcal{G}$ y todo $t \in \mathbf{R}$

$$e^{t\mathcal{D}(L)} = D(e^{tL}) .$$

(iii) Sean D y D' dos representaciones analíticas de G , y \mathcal{D} y \mathcal{D}' las correspondientes representaciones de \mathcal{G} . Si las dos primeras son equivalentes, entonces las dos segundas lo son.

(iv) Si D es reducible (completamente reducible) entonces \mathcal{D} es reducible (completamente reducible).

(v) Si G es conexo, D es irreducible si y sólo si \mathcal{D} es irreducible.

(vi) Si D es una representación unitaria, entonces \mathcal{D} es anti-Hermítica.

Los enunciados (iii), (iv) y (vi) resultan “si y sólo si” toda vez que el grupo G sea conexo.

Nota: El teorema anterior formaliza el hecho de que toda representación de un grupo de Lie da lugar a una representación de su correspondiente álgebra, mientras que la implicación inversa no es cierta en general (recordemos que distintos grupos comparten la misma álgebra de Lie). Es conveniente destacar que la cantidad $e^{t\mathcal{D}(L)}$ está bien definida para cualquier $L \in \mathcal{G}$ y $t \in \mathbf{R}$, pero no necesariamente constituye una representación del grupo G . Veremos un ejemplo más adelante, al considerar las representaciones de espín semientero del álgebra $so(3)$.

Def. 2.19 Si $D^{(a)} \oplus D^{(b)}$ es una representación del grupo G , la representación correspondiente del álgebra será $\mathcal{D}^{(a)} \oplus \mathcal{D}^{(b)}$.

Def. 2.20 El **producto de Kronecker** $\mathcal{T}^{(a \otimes b)}(L)$ de dos representaciones, $\mathcal{T}^{(a)}(L)$ y $\mathcal{T}^{(b)}(L)$, del álgebra de Lie \mathcal{G} , correspondiente a la representación $T^{(a \otimes b)}(g)$ del grupo G , $T^{(a \otimes b)}(g) = T^{(a)}(g) \otimes T^{(b)}(g)$, se obtiene mediante la identificación

$$\mathcal{T}^{(a \otimes b)}(L) = \left. \frac{d}{dt} T^{(a \otimes b)}(e^{tL}) \right|_{t=0} .$$

Sobre un elemento arbitrario $\mathbf{v}_a \otimes \mathbf{v}_b$ del espacio $V^{(a)} \otimes V^{(b)}$ encontramos

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{(a \otimes b)}(L) (\mathbf{v}_a \otimes \mathbf{v}_b) &= \left. \frac{d}{dt} \left(\mathcal{T}^{(a)}(e^{tL}) \mathbf{v}_a \otimes \mathcal{T}^{(b)}(e^{tL}) \mathbf{v}_b \right) \right|_{t=0} \\ &= (\mathcal{T}^{(a)}(L) \otimes 1_b + 1_a \otimes \mathcal{T}^{(b)}(L)) (\mathbf{v}_a \otimes \mathbf{v}_b) , \end{aligned}$$

de modo que, en una base ortonormal, $\mathbf{e}_{ik} \equiv \mathbf{e}_i^{(a)} \otimes \mathbf{e}_k^{(b)}$, del espacio producto directo,

$$\mathcal{T}^{(a \otimes b)}(L)_{ik \ jl} = \mathcal{T}^{(a)}(L)_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ij} \mathcal{T}^{(b)}(L)_{kl} .$$

Evidentemente, $\mathcal{T}^{(a \otimes b)}$ constituye una representación,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{(a \otimes b)}([L, M]) &= (\mathcal{T}^{(a)}([L, M]) \otimes 1_b + 1_a \otimes \mathcal{T}^{(b)}([L, M])) \\ &= [\mathcal{T}^{(a)}(L), \mathcal{T}^{(a)}(M)] \otimes 1_b + 1_a \otimes [\mathcal{T}^{(b)}(L), \mathcal{T}^{(b)}(M)] \\ &= [\mathcal{T}^{(a)}(L) \otimes 1_b, \mathcal{T}^{(a)}(M) \otimes 1_b] + [1_a \otimes \mathcal{T}^{(b)}(L), 1_a \otimes \mathcal{T}^{(b)}(M)] \\ &= [\mathcal{T}^{(a \otimes b)}(L), \mathcal{T}^{(a \otimes b)}(M)] . \end{aligned}$$

Nota: Es interesante observar que la definición del producto tensorial de representaciones de un álgebra difiere considerablemente de su correspondiente definición en el caso de los grupos. En particular, se verifica fácilmente que la cantidad $\mathcal{T}^{(a)}(L) \otimes \mathcal{T}^{(b)}(L)$ no es una representación del álgebra \mathcal{G} ,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{(a)}([L, M]) \otimes \mathcal{T}^{(b)}([L, M]) &= [\mathcal{T}^{(a)}(L), \mathcal{T}^{(a)}(M)] \otimes [\mathcal{T}^{(b)}(L), \mathcal{T}^{(b)}(M)] \\ &\neq [\mathcal{T}^{(a)}(L) \otimes \mathcal{T}^{(b)}(L), \mathcal{T}^{(a)}(M) \otimes \mathcal{T}^{(b)}(M)] . \end{aligned}$$

Def. 2.21 En general, la representación $\mathcal{T}^{(a \otimes b)}$ (y, por lo tanto, $\mathcal{T}^{(a \otimes b)}$) es reducible, pudiendo escribirse como

$$\mathcal{T}^{(a \otimes b)} = \sum_c n_c^{ab} \mathcal{T}^{(c)} \Leftrightarrow \mathcal{T}^{(a \otimes b)} = \sum_c n_c^{ab} \mathcal{T}^{(c)} ,$$

de manera que los coeficientes de la serie de Clebsch-Gordan, n_c^{ab} , de las representaciones del grupo y del álgebra coinciden.

2.4 El grupo de rotaciones en tres dimensiones

El grupo $O(3)$ consta de dos componentes conexas O_+ y O_- , y cualquier elemento de O_- puede obtenerse a partir de uno de O_+ a través de cualquier matriz de determinante -1 , por ejemplo, la que corresponde a la reflexión en torno del origen I_S . De esta forma, existe una biyección entre O_+ y O_- . Podemos restringirnos a la construcción de la componente conexa de la identidad, O_+ , o lo que es igual, a la construcción del grupo $SO(3)$, que no es otra cosa que el grupo de rotaciones en tres dimensiones.

Def. 2.22 *Cualquier elemento de $SO(3)$ puede escribirse en la forma $g = e^L$, donde $L \in so(3)$. En la tabla anterior, vimos que el álgebra $so(3)$ está compuesta por matrices reales 3×3 antisimétricas. Una base para este álgebra la constituye el siguiente conjunto de matrices reales $(L_i)_{jk} = \epsilon_{ijk}$,*

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Es inmediato comprobar que estas matrices satisfacen las siguientes reglas de conmutación

$$[L_i, L_j] = -\epsilon_{ijk} L_k \quad (f^k_{ij} = -\epsilon_{ijk}) .$$

Un elemento genérico de $so(3)$, por lo tanto, es de la forma

$$L(\vec{\omega}) = \vec{\omega} \cdot \vec{L} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

y a partir de él, podemos encontrar cualquier elemento del grupo $SO(3)$,

$$\begin{aligned} R(\vec{\omega}) &= e^{\vec{\omega} \cdot \vec{L}} \\ &= I + \vec{\omega} \cdot \vec{L} + \frac{1}{2}(\vec{\omega} \cdot \vec{L})^2 + \frac{1}{3!}(\vec{\omega} \cdot \vec{L})^3 + \frac{1}{4!}(\vec{\omega} \cdot \vec{L})^4 + \dots \\ &= I + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4!}\omega^2 + \dots \right) (\vec{\omega} \cdot \vec{L})^2 + \left(1 - \frac{1}{3!}\omega^2 + \dots \right) (\vec{\omega} \cdot \vec{L}) \\ &= I + (1 - \cos \omega) (\vec{n} \cdot \vec{L})^2 + \sin \omega (\vec{n} \cdot \vec{L}) \end{aligned}$$

donde hemos definido un vector unitario \vec{n} , mediante $\vec{\omega} = \omega \vec{n}$. Usaremos la notación $R_{\vec{n}}(\omega) = R(\vec{\omega})$ de forma intercambiable.

Nota: Si consideramos $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$, la expresión de $R(0, 0, \omega)$,

$$R(0, 0, \omega) = \begin{pmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

evidencia que se trata de una rotación finita de ángulo $\omega = |\vec{\omega}|$ alrededor del eje marcado por la dirección del vector unitario \vec{n} (en este caso, $\vec{n} = (0, 0, 1)$). En conclusión, las matrices de $SO(3)$, $R(\vec{\omega})$, **son rotaciones** de ángulo ω , en torno al eje que señala el vector \vec{n} , en el espacio euclídeo tridimensional. Todos los elementos de $SO(3)$ pueden parametrizarse en términos de $\vec{\omega} = \omega \vec{n}$ con $-\pi < \omega \leq \pi$.

Def. 2.23 Todo elemento de $SO(3)$, forma parte de algún subgrupo monoparamétrico (las rotaciones en torno a un eje fijo), y esta es la razón por la que puede escribirse como la exponencial de un elemento del álgebra $so(3)$. Se puede elegir una base de generadores hermíticos (observables) $J_i = -i\hbar L_i$, tal que:

$$[J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k, \quad (36)$$

que no son otra cosa que los operadores correspondientes al **momento angular**, como comprobaremos más adelante. En la expresión anterior, hemos introducido la constante de Planck \hbar , con el objeto de dar la expresión de J_i apropiada para el contexto de la mecánica cuántica. Las matrices de rotación, $R_{\vec{n}}(\omega) = e^{(i/\hbar)\vec{\omega}\cdot\vec{J}}$, son así operadores unitarios.

Def. 2.24 El álgebra $su(2)$ es el espacio vectorial de matrices 2×2 antihermíticas y sin traza. Una base de dicho espacio la constituyen las matrices

$$L_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad L_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

que satisfacen las mismas reglas de conmutación del álgebra $so(3)$, $[L_i, L_j] = -\epsilon_{ijk} L_k$. Es decir, nuevamente $f^k_{ij} = -\epsilon_{ijk}$. La aplicación lineal,

$$\begin{aligned} \varphi: so(3) &\longrightarrow su(2) \\ L_i &\longrightarrow L_i \end{aligned},$$

es un **isomorfismo** entre álgebras (es decir, preserva la estructura de los conmutadores). Las álgebras $so(3)$ y $su(2)$ son, por lo tanto, isomorfas. Se puede considerar del mismo modo una base de generadores hermíticos $\sigma_i = -2iL_i$, las matrices de Pauli, que satisfacen $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$; además de $\sigma_i^2 = I$ y $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}I$ (siendo este último, el anticonmutador de dos matrices, es decir, $\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i$). Los generadores hermíticos usados convencionalmente en Mecánica Cuántica son $J_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$, tales que sus relaciones de conmutación son, nuevamente, las correspondientes a los generadores infinitesimales del grupo de rotaciones, $[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk} J_k$.

Def. 2.25 Con un elemento arbitrario de $su(2)$,

$$L = \vec{\theta} \cdot \vec{L} = \frac{i}{2} \vec{\theta} \cdot \vec{\sigma},$$

podemos obtener el elemento genérico de $SU(2)$ mediante,

$$\begin{aligned} U(\vec{\theta}) &= e^{\vec{\theta}\cdot\vec{L}} \\ &= I + \frac{i}{2} \vec{\theta} \cdot \vec{\sigma} + \frac{1}{2} \left(\frac{i}{2} \vec{\theta} \cdot \vec{\sigma}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{i}{2} \vec{\theta} \cdot \vec{\sigma}\right)^3 + \dots \\ &= \cos \frac{\theta}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} + in_3 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} & (in_1 + n_2) \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \\ (in_1 - n_2) \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} - in_3 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde utilizamos nuevamente un vector unitario \vec{n} , $\vec{\theta} = \theta\vec{n}$. Podemos parametrizar los elementos de este grupo mediante un vector tridimensional $\vec{\theta}$, cuyo módulo varía en el rango $-2\pi < \omega \leq 2\pi$. Es decir que la periodicidad en el ángulo ω es de 4π , en lugar de 2π como ocurre para el grupo de rotaciones. De esta manera, el número de elementos de $SU(2)$ es el **doble** que el de $SO(3)$.

Def. 2.26 Podemos definir un **homomorfismo**,

$$h: \begin{array}{ccc} SU(2) & \longrightarrow & SO(3) \\ U(\vec{\theta}) & \longrightarrow & R(\vec{\theta}) \end{array} ,$$

que asigna dos elementos de $SU(2)$ a cada elemento de $SO(3)$. De hecho, se puede demostrar que, dado un homomorfismo, $Im(h) \simeq G/Ker(h)$. En nuestro caso, $Ker(h) = \{1_{2 \times 2}, -1_{2 \times 2}\} \sim Z_2$. Por lo tanto, $SO(3) \sim SU(2)/Z_2$. Por ser abeliano, $Ker(h)$ es un subgrupo normal. Por lo tanto, también $SU(2) \sim SO(3) \otimes Z_2$.

Def. 2.27 Los grupos $SU(2)$ y $SO(3)$ difieren en sus propiedades globales, pero comparten el mismo álgebra que, recordemos, refleja la estructura del grupo en el entorno de la identidad. Una **representación gráfica** de ambos grupos, que resulta de cierta utilidad, es la siguiente: el espacio de parámetros de $SO(3)$ puede acomodarse en el interior de la esfera de radio π , en la que cada punto indica una dirección del espacio y la magnitud de la rotación. Por su parte, y de forma análoga, el de $SU(2)$ se puede acomodar en el interior de la esfera de radio 2π . Hay, no obstante, una diferencia importante: en el último caso, todos los puntos de la superficie esférica $\theta = 2\pi$, se corresponden con un único elemento de $SU(2)$, $U_{\vec{n}}(2\pi) = -I$, de modo que esta representación, si bien es útil, no es fiel. En el caso de $SO(3)$, puntos diametralmente opuestos de la esfera representan al mismo elemento, $R_{\vec{n}}(\pi) = R_{-\vec{n}}(\pi)$.

Def. 2.28 Una trayectoria en $SO(3)$ que representa una sucesión continua de rotaciones de ángulos $-\pi \leq \theta \leq \pi$ en torno a un eje \vec{n} fijo, viene representada por una recta que atraviesa la esfera por el centro. Como puntos diametralmente opuestos representan la misma rotación, estos se pueden identificar y vemos que esta trayectoria constituye una **curva cerrada**. El mismo razonamiento puede hacerse para el grupo $SU(2)$, y considerar una curva cerrada constituida por un diámetro de la esfera. Sin embargo, en el caso de $SO(3)$, podemos ver que es imposible deformar continuamente la curva cerrada de manera que pueda contraerse a un punto: si se intenta contraer la curva hacia el interior de la esfera deja de ser cerrada, mientras que al mover uno de los puntos que está sobre la superficie esférica, el punto diametralmente opuesto se desplaza como una imagen especular para que la curva siga siendo cerrada. Esto no es así para $SU(2)$, ya que todos los puntos de la superficie esférica $\theta = 2\pi$ son equivalentes, lo que nos permite mover en forma independiente uno de los puntos sobre la superficie esférica (sin que la curva deje de ser cerrada), hasta hacerlo coincidir con el otro. Ahora, nada obstruye la deformación de la curva

cerrada a un punto. Decimos que un grupo de Lie, G , es **simplemente conexo** si toda curva cerrada puede deformarse de forma continua a un punto. $SO(3)$ no es simplemente conexo, mientras que $SU(2)$ sí lo es.

2.5 Representaciones Irreducibles de $su(2)$ y $so(3)$

Hemos visto que $su(2)$ y $so(3)$ son álgebras de Lie reales isomorfas. Por lo tanto, **sus representaciones irreducibles coinciden**. Entonces, en lo que resta de esta sección nos referiremos exclusivamente a $su(2)$.

Def. 2.29 La construcción de las representaciones irreducibles de $su(2)$ se simplifica enormemente si admitimos combinaciones lineales complejas de los generadores L_i . La estructura resultante se conoce como un **álgebra de Lie compleja**. Sea \mathcal{L} un álgebra de Lie real, tal que una base cualquiera es linealmente independiente también sobre el cuerpo de los números complejos. Podemos entonces considerar el cambio de cuerpo $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ y el álgebra compleja que se obtiene $\tilde{\mathcal{L}}$ es única, denominándose **complexificación** del álgebra de Lie real.

Def. 2.30 Podemos tomar las mismas matrices, como base para la complexificación $\tilde{su}(2)$, del álgebra de Lie real $su(2)$. La base es la misma, y la dimensión compleja también, por lo que la dimensión real se duplica. Se denomina usualmente (clasificación de Cartan) A_{N-1} al álgebra de Lie compleja $\tilde{su}(N)$. Vamos a construir las representaciones irreducibles de A_1 , que necesariamente coinciden con las de $su(2)$, debido a que las bases de ambos espacios vectoriales coinciden.

Def. 2.31 Dentro de A_1 , podemos definir los **operadores escalera** J_{\pm} , a partir de los generadores hermíticos J_i que obedecen (36), como $J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2$ (fijando $\hbar = 1$), y el álgebra $\tilde{su}(2)$ en esta nueva base resulta:

$$[J_3, J_{\pm}] = \pm J_{\pm} \quad [J_+, J_-] = 2J_3 . \quad (37)$$

Si bien J_3 sigue siendo hermítico, J_{\pm} son mutuamente adjuntos, $J_{\pm}^{\dagger} = J_{\mp}$. Finalmente, podemos construir una cantidad $J^2 \equiv J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$, que conmuta con todos los generadores del álgebra, $[J^2, J_i] = [J^2, J_{\pm}] = 0$, a la que se denomina **operador de Casimir**. En general, el álgebra de Lie compleja A_{N-1} tiene $N - 1$ operadores de Casimir independientes. Construir una representación \mathcal{D} de A_1 , de dimensión d , consiste en encontrar un conjunto de 3 matrices complejas $d \times d$ (o, en general, operadores matriciales, $\{\mathcal{D}(J_+), \mathcal{D}(J_-), \mathcal{D}(J_3)\}$, que verifiquen exactamente las relaciones de conmutación (37).

Teorema 2.7 Todas y cada una de las representaciones irreducibles de dimensión finita de $su(2)$ (y su complexificación A_1), vienen etiquetadas por un número entero o

semi-entero no-negativo j , $\{\mathcal{T}^{(j)}; j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots\}$, de modo que $\mathcal{T}^{(j)}$ es, en general, un operador lineal que actúa sobre un espacio vectorial $\mathbf{V}^{(j)}$ de dimensión real (o compleja) $d_j = 2j + 1$. Podemos escoger una base ortonormal de $\mathbf{V}^{(j)}$, dada por vectores $\{\mathbf{e}_m^{(j)}; m = j, j-1, j-2, \dots, -j+1, -j\}$, que sean autovectores de $\mathcal{T}^{(j)}(J^2)$ y de $\mathcal{T}^{(j)}(J_3)$ simultáneamente, con autovalores $j(j+1)$ y m respectivamente,

$$\mathcal{T}^{(j)}(J^2) \mathbf{e}_m^{(j)} = j(j+1) \mathbf{e}_m^{(j)} , \quad (38)$$

$$\mathcal{T}^{(j)}(J_3) \mathbf{e}_m^{(j)} = m \mathbf{e}_m^{(j)} . \quad (39)$$

Dem. Los operadores J^2 y J_3 son generadores hermíticos que conmutan entre sí. Existe, pues, una base común de autovectores $\mathbf{e}_m^{(j)}$ de $\mathcal{T}^{(j)}(J^2)$ y $\mathcal{T}^{(j)}(J_3)$ con autovalores reales, λ_j y m respectivamente. Podemos ver, a partir del álgebra (37), que

$$\begin{aligned} [\mathcal{T}^{(j)}(J_3), \mathcal{T}^{(j)}(J_{\pm})] \mathbf{e}_m^{(j)} &= (\mathcal{T}^{(j)}(J_3)\mathcal{T}^{(j)}(J_{\pm}) - \mathcal{T}^{(j)}(J_{\pm})\mathcal{T}^{(j)}(J_3)) \mathbf{e}_m^{(j)} \\ &= (\mathcal{T}^{(j)}(J_3) - m)\mathcal{T}^{(j)}(J_{\pm}) \mathbf{e}_m^{(j)} \\ &= \pm \mathcal{T}^{(j)}(J_{\pm}) \mathbf{e}_m^{(j)} , \end{aligned}$$

y, por lo tanto,

$$\mathcal{T}^{(j)}(J_3)(\mathcal{T}^{(j)}(J_{\pm}) \mathbf{e}_m^{(j)}) = (m \pm 1)(\mathcal{T}^{(j)}(J_{\pm}) \mathbf{e}_m^{(j)}) . \quad (40)$$

Es decir, $\mathcal{T}^{(j)}(J_{\pm})\mathbf{e}_m^{(j)}$ es un vector propio de $\mathcal{T}^{(j)}(J_3)$ con autovalor $m \pm 1$. Por lo tanto, los autovalores m forman una secuencia de números separados por intervalos enteros, y los operadores $\mathcal{T}^{(j)}(J_{\pm})$ permiten obtener los distintos autovectores a partir de cualquiera de ellos “subiendo y bajando” el valor de m (de ahí el nombre de operadores escalera que reciben J_{\pm}). Ahora, dado que J^2 es un operador de Casimir –es decir, conmuta con todos los generadores del álgebra–, todos los autovectores pertenecientes a una secuencia de valores $\dots m-2, m-1, m, m+1, m+2..$ comparten idéntico autovalor de $\mathcal{T}^{(j)}(J^2)$,

$$\mathcal{T}^{(j)}(J^2)(\mathcal{T}^{(j)}(J_{\pm}) \mathbf{e}_m^{(j)}) = \mathcal{T}^{(j)}(J_{\pm})\mathcal{T}^{(j)}(J^2) \mathbf{e}_m^{(j)} = \lambda_j(\mathcal{T}^{(j)}(J_{\pm}) \mathbf{e}_m^{(j)}) .$$

Esta secuencia de vectores genera el subespacio vectorial invariante bajo la acción de todos los elementos del álgebra. Para una representación finita, la secuencia de valores adoptados por m debe truncarse para algún valor máximo m_{max} y otro mínimo m_{min} , de modo que

$$\mathcal{T}^{(j)}(J_+) \mathbf{e}_{m_{max}}^{(j)} = \mathcal{T}^{(j)}(J_-) \mathbf{e}_{m_{min}}^{(j)} = 0 .$$

Llamemos j al *máximo* autovalor de $\mathcal{T}^{(j)}(J_3)$, $m_{max} \equiv j$. Es sencillo comprobar que los generadores de A_1 y el operador de Casimir satisfacen la siguiente identidad, $J_- J_+ = J^2 - J_3(J_3 + 1)$, por lo que

$$\mathcal{T}^{(j)}(J_-)\mathcal{T}^{(j)}(J_+) \mathbf{e}_j^{(j)} = [\mathcal{T}^{(j)}(J^2) - \mathcal{T}^{(j)}(J_3)(\mathcal{T}^{(j)}(J_3) - 1)] \mathbf{e}_j^{(j)} = (\lambda_j - j(j+1)) \mathbf{e}_j^{(j)} = 0 ,$$

es decir, $\lambda_j = j(j+1)$ es el autovalor de $\mathcal{T}^{(j)}(J^2)$ que caracteriza a toda la representación irreducible. Si aplicamos sucesivamente el operador $\mathcal{T}^{(j)}(J_-)$ al autovector $\mathbf{e}_j^{(j)}$, es evidente que, dado que la representación es de dimensión finita, debe existir un número natural k , tal que $\mathcal{T}^{(j)}(J_-^{k+1})\mathbf{e}_j^{(j)} = 0$. De este modo, el mínimo autovalor de $\mathcal{T}^{(j)}(J_3)$ resultará ser $j - k$. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{(j)}(J_+)\mathcal{T}^{(j)}(J_-^{k+1})\mathbf{e}_j^{(j)} &= [\mathcal{T}^{(j)}(J^2) - \mathcal{T}^{(j)}(J_3)(\mathcal{T}^{(j)}(J_3) - 1)](\mathcal{T}^{(j)}(J_-^k)\mathbf{e}_j^{(j)}) \\ &= [j(j+1) - (j-k)(j-k-1)](\mathcal{T}^{(j)}(J_-^k)\mathbf{e}_j^{(j)}) = 0, \end{aligned}$$

por lo que $j = k/2$: los únicos valores posibles para j son **enteros o semienteros positivos**, mientras que los valores propios posibles para J_3 son $j, j-1, j-2, \dots, -j+1, -j$, en total $2j+1$ valores. La dimensión de la representación es, entonces, $d_j = 2j+1$.

Nota: Las fases relativas de los vectores $\mathbf{e}_m^{(j)}$ pueden ser escogidas de forma que

$$\mathcal{T}^{(j)}(J_\pm)\mathbf{e}_m^{(j)} = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\mathbf{e}_{m\pm 1}^{(j)}.$$

Finalmente, es interesante resaltar que los resultados anteriores nos permiten escribir todas las representaciones matriciales irreducibles de dimensión finita de $su(2)$, en la base $\{\mathbf{e}_m^{(j)}\}$, cuyos elementos de matriz resultan

$$\mathcal{D}^{(j)}(J_+)_{m'm} = \sqrt{(j-m)(j+m+1)}\delta_{m',m+1}, \quad (41)$$

$$\mathcal{D}^{(j)}(J_-)_{m'm} = \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\delta_{m',m-1}, \quad (42)$$

$$\mathcal{D}^{(j)}(J_3)_{m'm} = m\delta_{m',m}. \quad (43)$$

Def. 2.32 *El problema de encontrar las representaciones irreducibles de dimensión finita de los grupos de Lie $SU(2)$ y $SO(3)$ está formalmente resuelto a partir del teorema anterior. Para cada $j = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$, podemos obtener una representación irreducible de $SU(2)$, $D^{(j)}$, a partir de la correspondiente representación de $su(2)$, $\mathcal{D}^{(j)}$, mediante la aplicación del mapa exponencial*

$$D^{(j)}(g) = e^{i\mathcal{D}^{(j)}(J)}, \quad (44)$$

donde J es un elemento del álgebra y $g = e^{iJ}$ (el factor imaginario puro i aparece debido a que estamos trabajando con los generadores hermíticos J_i del álgebra, en lugar de los L_i utilizados previamente). La ecuación anterior, tras el desarrollo en serie de la exponencial, permite obtener explícitamente todas las matrices $(2j+1) \times (2j+1)$ que caracterizan a cada representación irreducible de dimensión finita de $SU(2)$.

Def. 2.33 Las álgebras $su(2)$ y $so(3)$ son isomorfas y, por lo tanto, comparten el mismo conjunto de representaciones irreducibles (41)–(43). Sin embargo, no todas ellas inducen bajo la aplicación exponencial representaciones del grupo $SO(3)$. Recordemos que $SO(3)$ difiere **globalmente** de $SU(2)$, al no ser simplemente conexo. Consideremos, por un instante, las matrices $D^{(j)}(g)$ correspondientes a los elementos del subgrupo monoparamétrico $g(\theta) = e^{i\theta J_3}$,

$$D^{(j)}(g(\theta)) = \text{diag} (e^{i\theta j}, e^{i\theta(j-1)}, \dots, e^{i\theta(-j+1)}, e^{i\theta(-j)}) .$$

Claramente, la periodicidad $g(\theta) = g(\theta + 2\pi)$ propia del grupo $SO(3)$ sólo se ve reproducida cuando j es un número **entero**. Es decir: la representación $\mathcal{D}^{(j)}$ de $so(3)$ induce bajo exponenciación una representación $D^{(j)}$ del grupo $SO(3)$, si y sólo si j es un entero no-negativo.

Def. 2.34 El caracter $\chi^{(j)}(\vec{\omega})$ de un elemento $g(\vec{\omega})$ de $SU(2)$ ($SO(3)$) en la representación $D^{(j)}$ (consideremos, por el momento, $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$), en cuyo caso el caracter es la traza de una matriz diagonal), resulta:

$$\chi^{(j)}(\vec{\omega}) = \sum_{m=-j}^j e^{im\omega} = \frac{e^{-ij\omega} - e^{i(j+1)\omega}}{1 - e^{i\omega}} = \frac{\text{sen}(j + \frac{1}{2})\omega}{\text{sen} \frac{1}{2}\omega} . \quad (45)$$

Cualquier otra rotación del mismo ángulo en torno a otro eje \vec{n} , se puede obtener mediante un cambio de orientación de los ejes, operación que constituye un cambio de base, por lo que no modifica el valor del caracter. Dicho de otro modo, todas las rotaciones de ángulo ω son conjugadas en $SU(2)$ ($SO(3)$), por lo que el caracter sólo depende del ángulo de rotación y **no** del eje de rotación.

2.6 Representaciones de $SO(3)$ y $SU(2)$ sobre $L^2(\mathbf{R}^3)$

El espacio de funciones de variable real con cuadrado integrable juega un papel central en la elaboración de la Mecánica Cuántica. Por este motivo, consideraremos brevemente en esta sección la construcción de representaciones de los grupos $SO(3)$ y $SU(2)$, en este orden, sobre el espacio (funcional) de Hilbert $L^2(\mathbf{R}^3)$.

Def. 2.35 La acción de un elemento $g(\vec{\theta}) \in SO(3)$ sobre un vector del espacio \mathbf{R}^3 , viene dada a través de la representación irreducible tridimensional del grupo; es decir, las matrices de rotación definidas anteriormente,

$$g : \vec{x} \longrightarrow R(\vec{\theta}) \vec{x} .$$

Consideremos un operador lineal $U(\vec{\theta})$ actuando sobre una función f perteneciente al espacio de Hilbert $L^2(\mathbf{R}^3)$,

$$g : f(\vec{x}) \longrightarrow U(\vec{\theta}) f(\vec{x}) .$$

El valor de la función en un punto cualquiera, digamos $f(\vec{x})$, debe ser igual al valor de la función transformada, f' , en el punto transformado, \vec{x}' , $f'(\vec{x}') = f(\vec{x})$. Es decir,

$$f'(\vec{x}') = f'(R(\vec{\theta}) \vec{x}) = U(\vec{\theta}) [f(R(\vec{\theta}) \vec{x})] = f(\vec{x}) ,$$

y, por lo tanto,

$$U(\vec{\theta})f(\vec{x}) = f(R^{-1}(\vec{\theta})\vec{x}) . \quad (46)$$

Teorema 2.8 El conjunto de operadores lineales $\{U(g)\}$, $g \in G$ definido anteriormente, forma una representación del grupo G sobre el espacio de Hilbert $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^3)$.

Def. 2.36 Si $U(g)$ forma una representación finita de G actuando sobre algún subespacio $\mathbf{V} \subset \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^3)$, podemos obtener una representación del álgebra \mathcal{G} sobre el mismo subespacio vectorial, en forma de operadores lineales $\mathcal{U}(L)$, $L \in \mathcal{G}$, a través de la identidad operatorial del teorema 2.6,

$$\mathcal{U}(L_i) = \left. \frac{dU(e^{tL_i})}{dt} \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [U(e^{tL_i}) - U(1)] ,$$

de modo que,

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(L_i) f(\vec{x}) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [U(e^{tL_i}) - U(1)] f(\vec{x}) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(R(e^{-tL_i}) \vec{x}) - f(\vec{x})] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(\vec{x} - t\mathcal{R}(L_i) \vec{x} + O(t^2)) - f(\vec{x})] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(\vec{x}) - t\vec{x}^t \mathcal{R}(L_i)^t \vec{\partial} f(\vec{x}) + O(t^2) - f(\vec{x})] \\ &= -\vec{x}^t \mathcal{R}(L_i)^t \vec{\partial} f(\vec{x}) , \end{aligned}$$

donde $R(g)$ y $\mathcal{R}(L_i)$ no son otra cosa que las correspondientes representaciones matriciales tridimensionales de G y \mathcal{G} respectivamente. Por ejemplo, en el caso de $so(3)$, las matrices $\mathcal{R}(L_i)$ son aquellas definidas previamente (Def.2.22), mientras que las $R(g)$ pueden obtenerse a partir de las anteriores mediante el mapa exponencial. En términos de los generadores hermíticos, $J_i = -iL_i$, cuyos elementos de matriz resultan $(J_i)_{jk} = -i\epsilon_{ijk}$, obtenemos los siguientes operadores diferenciales

$$\mathcal{U}(J_k) = -i\epsilon_{ijk} x^i \frac{\partial}{\partial x^j} ,$$

los que, por supuesto, verifican el álgebra

$$[\mathcal{U}(J_i), \mathcal{U}(J_j)] = \mathcal{U}([J_i, J_j]) = i\epsilon_{ijk} \mathcal{U}(J_k) ,$$

formando una representación de $so(3)$ sobre $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^3)$. Además, $\mathcal{U}(\vec{J}) = \vec{r} \times \vec{p}$.

Def. 2.37 Si en lugar de trabajar en coordenadas cartesianas utilizamos coordenadas esféricas, (r, θ, ϕ) , la representación toma la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(J_1) &= i \left(\operatorname{sen} \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) , \\ \mathcal{U}(J_2) &= -i \left(\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \operatorname{sen} \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) , \\ \mathcal{U}(J_3) &= -i \frac{\partial}{\partial \phi} , \end{aligned}$$

de modo tal que las funciones $\psi_m^{(j)}$ que forman la base para el subespacio invariante $\mathbf{V}^{(j)} \subset \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^3)$,

$$\mathcal{U}(J^2) \psi_m^{(j)}(\vec{x}) = j(j+1) \psi_m^{(j)}(\vec{x}) \quad \mathcal{U}(J_3) \psi_m^{(j)}(\vec{x}) = m \psi_m^{(j)}(\vec{x}) ,$$

resultan, simplemente,

$$\psi_m^{(j)}(\vec{x}) = Y_{jm}(\theta, \phi) R(r) ,$$

donde $Y_{jm}(\theta, \phi)$ son los **armónicos esféricos**, y $R(r)$ es una función de r , tal que

$$\int_0^\infty |R(\vec{x})|^2 r^2 dr = 1 .$$

En resumen, a efectos de encontrar las funciones $\psi_m^{(j)}(\vec{x})$ que forman la base del subespacio invariante $\mathbf{V}^{(j)}$ sobre el que actúa la representación $\mathcal{D}^{(j)}$, sólo la parte angular es relevante, y ésta viene dada por los armónicos esféricos $Y_{jm}(\theta, \phi)$. La actuación de los elementos del grupo $SO(3)$, se obtiene de acuerdo a lo visto más arriba, en la forma siguiente

$$U^{(j)}(g) \psi_m^{(j)}(\vec{x}) = \psi_m^{(j)}(R(g^{-1})\vec{x}) = \sum_{m'=-j}^j D^{(j)}(g)_{mm'} \psi_{m'}^{(j)}(\vec{x}) .$$

Def. 2.38 En el caso del grupo $SU(2)$ se procede de manera análoga. Consideremos, por ejemplo, la representación $U^{(j)}$ del grupo $SU(2)$ sobre el espacio vectorial de las funciones complejas de dos variables, $\vec{z} = (z_1, z_2)$, de cuadrado integrable. Siguiendo los mismos pasos de la página anterior, obtenemos una representación del álgebra $su(2)$ en forma de operadores diferenciales de primer orden $\mathcal{U}(J_i) = -\vec{z}^t \mathcal{R}(J_i)^t \vec{\partial}$, donde $\mathcal{R}(J_i)$ son las matrices de Pauli. Explícitamente,

$$\mathcal{U}(J_+) = -z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} \quad \mathcal{U}(J_-) = -z_1 \frac{\partial}{\partial z_2} \quad \mathcal{U}(J_3) = -\frac{1}{2} \left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \right) ,$$

con lo que la base de autofunciones $\psi_m^{(j)}(\vec{z})$ del subespacio vectorial $\mathbf{V}^{(j)} \subset \mathbf{L}^2(\mathbf{C}^2)$, resulta:

$$\psi_m^{(j)}(\vec{z}) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{(j-m)!(j+m)!}} z_1^{j-m} z_2^{j+m} ,$$

con $j = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$ y $m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$.

2.7 Producto de Kronecker: acoplamiento de espines

Def. 2.39 Recordemos, que la serie de Clebsch-Gordan, reproduce la descomposición del producto directo de dos representaciones irreducibles, como suma directa de representaciones irreducibles. Físicamente, en el caso del grupo $SU(2)$ (también en el de $SO(3)$), esto se corresponde con el **acoplamiento de momentos angulares** en Mecánica Cuántica. La serie de Clebsch-Gordan, para el producto directo de dos representaciones irreducibles $D^{(j_1)}$ y $D^{(j_2)}$ de $SU(2)$, es

$$D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)} = \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{|j_1+j_2|} D^{(j)} . \quad (47)$$

De hecho, sea $j_1 \geq j_2$, podemos verificar la afirmación anterior de forma sencilla, calculando el caracter de la representación producto de Kronecker,

$$\begin{aligned} \chi^{(j_1 \otimes j_2)}(\omega) &= \chi^{(j_1)}(\omega) \chi^{(j_2)}(\omega) \\ &= \frac{e^{i(j_1+\frac{1}{2})\omega} - e^{-i(j_1+\frac{1}{2})\omega}}{2i \operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} \sum_{m=-j_2}^{j_2} e^{im\omega} \\ &= \frac{1}{2i \operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} \sum_{m=-j_2}^{j_2} (e^{i(j_1+m+\frac{1}{2})\omega} - e^{-i(j_1-m+\frac{1}{2})\omega}) \\ &= \frac{1}{2i \operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} \sum_{j=j_1-j_2}^{j_1+j_2} (e^{i(j+\frac{1}{2})\omega} - e^{-i(j+\frac{1}{2})\omega}) \\ &= \sum_{j=j_1-j_2}^{j_1+j_2} \chi^j(\omega) , \end{aligned}$$

donde usamos el hecho de que la suma en m es sobre un intervalo par, por lo que podemos cambiar $-m$ por m en el segundo exponente y notar que m y j_1 aparecen siempre en la combinación $j = j_1 + m$, con j corriendo desde $j_1 - j_2$ hasta $j_1 + j_2$. De este resultado se deduce la descomposición de Clebsch-Gordan (47).

Ejemplo:

Acoplamiento de espines. Dos partículas de espín $1/2$ –es decir, que transforman frente a operaciones de $SU(2)$ según la representación $D^{(1/2)}$ –, se acoplan para dar lugar a estados ligados de espín 1 y 0 , de acuerdo a la fórmula anterior. Es decir,

$$D^{(1/2)} \otimes D^{(1/2)} = D^{(1)} \oplus D^{(0)} .$$

Los vectores correspondientes al producto de Kronecker, $x_m^{(1/2)} \otimes x_{m'}^{(1/2)}$, y a su descomposición en representaciones irreducibles, $X_m^{(j)}$, $k = 0, 1$, están relacionados, como vimos en el caso de los grupos finitos, por la matriz de coeficientes de Clebsch-Gordan. Recordemos, también, que la representación producto de Kronecker del álgebra se escribe:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(1/2) \otimes (1/2)}(J_3) &= D^{(1)}(J_3) \oplus D^{(0)}(J_3) \\ &= \mathcal{D}^{(1/2)}(J_3) \otimes I + I \otimes \mathcal{D}^{(1/2)}(J_3) , \end{aligned}$$

y expresiones análogas para las demás componentes del momento angular. Su acción sobre los vectores es inmediata,

$$\mathcal{D}^{(1/2)\otimes(1/2)}(J_3) x_m^{(1/2)} \otimes x_{m'}^{(1/2)} = (m + m') x_m^{(1/2)} \otimes x_{m'}^{(1/2)} , \quad (48)$$

$$\mathcal{D}^{(1/2)\otimes(1/2)}(J_3) X_m^{(j)} = m X_m^{(j)} , \quad (49)$$

de donde se deducen los primeros coeficientes de Clebsch–Gordan,

$$X_1^{(1)} = x_{1/2}^{(1/2)} \otimes x_{1/2}^{(1/2)} \quad X_{-1}^{(1)} = x_{-1/2}^{(1/2)} \otimes x_{-1/2}^{(1/2)} . \quad (50)$$

Para obtener los restantes, simplemente debemos actuar con los operadores escalera sobre cualquiera de los dos vectores anteriores,

$$X_0^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_{1/2}^{(1/2)} \otimes x_{-1/2}^{(1/2)} + x_{-1/2}^{(1/2)} \otimes x_{1/2}^{(1/2)}) , \quad (51)$$

y, finalmente, imponiendo la ortogonalidad de este vector con $X_0^{(0)}$, obtenemos:

$$X_0^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_{1/2}^{(1/2)} \otimes x_{-1/2}^{(1/2)} - x_{-1/2}^{(1/2)} \otimes x_{1/2}^{(1/2)}) , \quad (52)$$

Notar que el acoplamiento de momentos angulares permite escribir matrices de rotación a partir de representaciones espinoriales del grupo $SU(2)$. Por otra parte, el acoplamiento de pares de partículas elementales resulta en nuevas partículas compuestas, con una naturaleza distinta frente al grupo de rotaciones, *e.g.* pares de quarks formando mesones.

2.8 El grupo de Lorentz propio

En 1905, Einstein postuló la teoría de la relatividad especial a partir de la observación de cierta asimetría formal entre las ecuaciones de Maxwell y el resto de las leyes físicas: las ecuaciones del electromagnetismo no son covariantes frente a transformaciones del grupo de Galileo. Este último, recordemos, deja invariante a la distancia entre dos puntos cualesquiera y está compuesto por las transformaciones entre sistemas inerciales. El grupo de simetría que subyace a las ecuaciones de Maxwell es el mismo que deja invariante a una cantidad conocida como el **intervalo**, $\tau^2 = c^2t^2 - \vec{x}^2$, donde c es la velocidad de la luz. Resulta conveniente utilizar la siguiente notación: definimos como **cuadrivector** al conjunto de cuatro cantidades $x_\mu \equiv (x_0; \vec{x}) = (ct; \vec{x})$ y a la **métrica de Minkowski** como $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, con lo que la cantidad $x^2 \equiv x_\mu x^\mu = g^{\mu\nu} x_\mu x_\nu$ es exactamente el intervalo definido previamente. Las transformaciones de coordenadas, $x_\mu \rightarrow x'_\mu = \omega_\mu^{\mu'} x_{\mu'}$, que dejan invariante al intervalo,

$$x'^2 = g^{\mu\nu} x'_\mu x'_\nu = g^{\mu\nu} \omega_\mu^{\mu'} \omega_\nu^{\nu'} x_{\mu'} x_{\nu'} = x^2 ,$$

son aquellas que satisfacen,

$$g^{\mu\nu}\omega_\mu^{\mu'}\omega_\nu^{\nu'} = g^{\mu',\nu'} ,$$

es decir, las que corresponden al grupo $O(3,1)$. Notar que la ecuación anterior pone en evidencia que $g^{\mu\nu}$ es un tensor invariante, por lo que puede ser utilizado para subir y bajar índices. La componente conexa del grupo es conocida como el **grupo de Lorentz propio**, y corresponde a $SO(3,1)$. Se puede acceder a las otras componentes del grupo de Lorentz mediante la paridad ($t' = t; \vec{x}' = -\vec{x}$) o la inversión temporal ($t' = -t; \vec{x}' = \vec{x}$).

Def. 2.40 *El grupo de Lorentz propio está también conectado a $SL(2, \mathbf{C})$, según una relación “2 a 1” similar a la existente entre $SO(3)$ y $SU(2)$. A partir de un cuadrivector v_μ , podemos construir la matriz $V \equiv v_\mu \sigma^\mu$ con $\sigma_\mu \equiv (1; \vec{\sigma})$, relación que puede ser invertida utilizando $\tilde{\sigma}_\mu \equiv (1; -\vec{\sigma})$, según $v_\mu = (1/2)\text{tr} [\tilde{\sigma}_\mu V]$. La forma explícita de V es:*

$$V = \begin{pmatrix} v_0 - v_3 & -v_1 + iv_2 \\ -v_1 - iv_2 & v_0 + v_3 \end{pmatrix} ,$$

de donde $v^2 = \det V$, que es invariante frente a las transformaciones de $SL(2, \mathbf{C})$, $V' = AVA^\dagger$. El mapa entre los grupos, $\omega : SL(2, \mathbf{C}) \rightarrow SO(3,1)$ resulta explícitamente $\omega_{\mu\nu}(A) = (1/2)\text{tr} [\tilde{\sigma}_\mu A \sigma_\nu A^\dagger]$. El kernel de este mapa es nuevamente el centro de $SU(2)$, i.e. $A = \pm 1_{2 \times 2}$.

Def. 2.41 *Los generadores de $SO(3,1)$ conforman la base del álgebra $so(3,1)$. Vienen dados por un conjunto de seis operadores que en el marco del álgebra complejificada pueden ser combinados y acomodados en dos vectores $\mathbf{X}^{(\pm)}$, cuyas reglas de conmutación,*

$$[X_i^{(+)}, X_j^{(+)}] = i\epsilon_{ijk}X_k^{(+)} \quad , \quad [X_i^{(-)}, X_j^{(-)}] = i\epsilon_{ijk}X_k^{(-)} \quad , \quad [X_i^{(+)}, X_j^{(-)}] = 0 \quad ,$$

muestran que $\widetilde{so}(3,1) \sim \widetilde{su}(2) \otimes \widetilde{su}(2)$. Sus representaciones irreducibles son etiquetadas por un par (j_1, j_2) y son de dimensión finita $d_{j_1, j_2} = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$. Las partículas elementales deben acomodarse en representaciones del grupo de Lorentz propio. Aparte de la representación trivial $(0,0)$, se tienen las representaciones de Weyl $(0, \frac{1}{2})$ y $(\frac{1}{2}, 0)$, utilizadas para describir al neutrino en Teoría Cuántica de Campos. La representación de Dirac, en la que se acomoda el electrón relativista, es una representación reducible $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$, y actúa sobre espinores de cuatro componentes (la operación de paridad intercambia $\mathbf{X}^{(+)}$ con $\mathbf{X}^{(-)}$, de modo que una representación que incluya la operación de paridad debe ser simétrica en j_1 y j_2). La representación $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ es la que actúa sobre cuadrivectores, y $(1, 0) \oplus (0, 1)$, con seis grados de libertad, es aquella según la cuál transforma el campo electromagnético $F_{\mu\nu}$. Finalmente, debemos resaltar que las representaciones finitas del grupo de Lorentz **no** son unitarias. $SO(3,1)$ **no** es un grupo compacto.