

Física Matemática

Javier Mas

Universidad de Santiago de Compostela

23 de febrero de 2011

Índice general

1. Espacios Lineales	6
1.1. Espacios Vectoriales	6
1.1.1. Base y Dimensión	7
1.1.2. Subespacios Vectoriales	8
1.2. Espacios Lineales Normados	8
1.3. Convergencia de Sucesiones.	10
1.3.1. Convergencia de sucesiones y series en espacios normados	11
1.3.2. Espacios Completos	11
1.4. Espacios Lineales con Producto Escalar	13
1.4.1. Norma inducida por un producto escalar	14
1.5. Espacios de Hilbert	15
1.5.1. Bases	16
1.6. Espacios de Hilbert Separables	18
1.6.1. Teorema del Isomorfismo	19
1.7. Algunas bases ortonormales importantes	20
2. El Espacio Dual	22
2.1. Formas Lineales	22
2.1.1. Base y Dimensión	22
2.1.2. Cambios de Base	23
2.2. Dualidad en espacios de Hilbert	27
2.2.1. La aplicación adjunta, $\dagger : V \Rightarrow V^*$	27
2.2.2. $V^* \Rightarrow V$	29
2.2.3. Dimensión infinita: Distribuciones	30
2.2.4. Bases Continuas	31
3. Tensores	34
3.1. Producto Tensorial de Espacios Vectoriales	34
3.2. Tensores	35
3.2.1. Operaciones con Tensores	37
3.3. Tensor Métrico y Producto Escalar Real	39
3.4. Tensores Simétricos y Antisimétricos	41

3.4.1.	El símbolo alternante $\epsilon_{i_1 \dots i_d}$	42
3.5.	Densidades Tensoriales	43
3.5.1.	Densidades tensoriales a partir de tensores.	44
4.	Operadores Lineales	46
4.1.	Operadores Lineales y Antilineales	46
4.2.	Representación de un Operador	47
4.2.1.	Representación Continua	50
4.2.2.	La Representación Exponencial	54
4.3.	Operador adjunto	55
4.3.1.	Operador Hermítico	56
4.3.2.	Operador Inverso	57
4.3.3.	Operador Unitario	57
4.4.	Proyector	58
4.5.	Valores y vectores propios	59
4.5.1.	Espectro de Operadores Hermíticos	60
4.5.2.	Resolución Espectral	61
4.5.3.	Espectro de Proyector Ortogonales	61
4.5.4.	Espectro de Unitarios	62
4.5.5.	Cálculo Variacional del Espectro de un Operador Autoadjunto	62
4.6.	Diagonalización	62
4.6.1.	Diagonalizabilidad Simultánea de Dos Operadores	63
4.7.	Operadores Hermíticos y Mecánica Cuántica	64
4.7.1.	Postulados de la Medida	64
4.7.2.	Estados Puro y Mezcla	65
4.7.3.	Producto Tensorial de Operadores	67
5.	Elementos de Geometría Diferencial	72
5.1.	Sistemas Generales de Coordenadas	72
5.2.	Espacio Tangente	73
5.2.1.	Curvas	73
5.2.2.	Funciones $\mathcal{F}(M)$	74
5.2.3.	Vectores Tangentes	74
5.3.	Tensores Generales	76
5.3.1.	Co-Vectores Tangentes	76
5.3.2.	Tensores de Rango (p, q)	77
5.4.	Flujos y Derivadas de Lie	77
5.4.1.	Curva Integral	77
5.4.2.	Flujo de Lie	79
5.4.3.	Derivada de Lie	79

6. Grupos: Definición y Propiedades	81
6.1. Definición de Grupo	81
6.2. La Estructura de los Grupos	82
6.2.1. Clases de Conjugación	82
6.2.2. Subgrupos	83
6.2.3. Coset	84
6.2.4. Subgrupos Normales	84
6.2.5. Grupo Cociente	85
6.2.6. Producto Directo	85
6.2.7. Centro de un Grupo	86
7. Grupos Finitos	87
7.1. El Grupo Cíclico C_n	87
7.2. El Grupo Dihédrico D_n	88
7.2.1. El grupo D_3	89
7.2.2. El grupo D_4	90
7.2.3. El grupo D_n	91
7.3. El Grupo Simétrico S_n	91
7.3.1. Notación de Ciclos	92
7.3.2. Teorema de Cayley	93
7.3.3. Clases de Conjugación de S_n	94
7.3.4. El Grupo Alternante A_n	95
8. Representaciones	96
8.1. Homomorfismos	96
8.2. Representaciones de Grupos	96
8.3. Reducibilidad	98
8.3.1. Reducibilidad y Reducibilidad Total	99
8.3.2. Propiedades de Representaciones Irreducibles.	100
8.4. Caracteres	105
8.4.1. Ortogonalidad de los Caracteres	106
8.4.2. Descomposición en Representaciones Irreducibles	107
8.4.3. La Representación Regular	108
8.5. Construcción de una Tabla de Caracteres	109
8.5.1. Tabla de Caracteres de C_3	110
8.5.2. Tabla de Caracteres de \mathbf{D}_3	111
8.6. Producto Directo de Representaciones	112
8.6.1. Producto Directo de Representaciones, Reducibilidad.	112
8.6.2. Serie de Clebsh-Gordan	113

9. Grupos de Lie	115
9.1. Definición y Ejemplos	115
9.1.1. Grupos Continuos y Grupos de Lie	115
9.1.2. Ejemplos de Grupos de Lie	116
9.1.3. Los grupos $O(2)$ y $SO(2)$	118
9.1.4. Los grupos $U(1)$, $U(2)$ y $SU(2)$	118
9.2. Estructura Global de los Grupos de Lie	119
9.2.1. Subgrupos de Lie	119
9.2.2. Componentes Conexas de un Grupo de Lie	120
9.2.3. Grupos de Lie Compactos y No-Compactos	120
9.3. Estructura Local de los Grupos de Lie	121
9.3.1. Algebras de Lie	121
9.3.2. El mapa exponencial	122
9.4. Representaciones de Grupos de Lie y Algebras de Lie	123
9.4.1. Representaciones de Algebras de Lie	123
9.5. Conexión entre $D(g)$ y $\mathcal{D}(L)$.	124
10.El Grupo de Rotaciones	126
10.1. El grupo $O(3)$	126
10.1.1. El álgebra $so(3)$	126
10.1.2. Generadores Hermíticos	128
10.2. El grupo $SU(2)$	128
10.2.1. El álgebra $su(2)$	129
10.2.2. Homomorfismo entre $SU(2)$ y $SO(3)$	130
10.3. Representaciones Irreducibles de $SU(2)$ y $SO(3)$.	131
10.3.1. Representaciones Irreducibles de $su(2)$ y $so(3)$.	131
10.3.2. Representaciones de los Grupos $SU(2)$ y $SO(3)$	136
10.4. Producto Directo de Representaciones	137
10.4.1. Composición de Momento Angular	138
10.5. Tensores de $SU(2)$	140
10.5.1. Homomorfismo entre $SU(2)$ y $SO(3)$	142
10.6. Rotaciones de Magnitudes Físicas	144

BIBLIOGRAFIA

1. Espacios de Hilbert.

- 1.1 C Cohen-Tannoudji, B. Diu y F. Laloe, *Mechanique Quantique I*, chapitre 2. Enseignement des sciences.
- 1.2 A.N. Kolmogórov y S.V. Fomín. *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*. Ed. Mir. Moscú 1975.
- 1.3 L. Avellanas y A. Galindo *Espacios de Hilbert*. Eudema Universidad, Manuales.
- 1.4 V. A. Trenoguin et. al. :*Problemas y Ejercicios de Análisis Funcional*. Ed. Mir. Moscú 1984.
- 1.5 E. Prugovecki :*Quantum Mechanics in Hilbert Space*. Academic Press1971. *Bib. Fis. A02-9*
- 1.6 I. Richards and H. Youn. :*Theory of Distributions*. Cambridge Univ. Press, 1990, *Bib. Fis. A02-314*
- 1.7 T. Schuecker. :*Distributions, Fourier Transforms and Some of their Applications to Physics*. World Sci., *Bib. Fis. A02-303*.

2. Teoría de Grupos.

- 2.1 H.F. Jones. *Groups, Representations and Physics* . Adam Hilger. Londres 1990.
- 2.2 J.F. Cornwell. *Group Theory in Physics*. Academic Press. Londres 1984.
- 2.3 M. Hammermesh. *Group Theory and its Application to Physical Problems*. Addison Wesley.
- 2.4 Brian S. Wherrett:*Group Theory for Atoms, Molecules and Solids*. Prentice Hall Int.
- 2.5 Masud Chaichian y Rolf Hagedorn *Symmetries in Quantum Mechanics*. IOP Publishing, 1998. *Bibl. Fis. A03-215*.
- 2.6 B.N. Shapukov, *Grupos y Álgebras de Lie en ejercicios y problemas*. Ed. URSS.

3. Geometría

- 3.1 M. Nakahara.*Geometry, Topology and Physics*. Adam Hilger.
- 3.2 B. Schutz. *Geometrical Methods in Mathematical Physics*.
- 3.3 Peter Szekeres, *A Course in Modern Mathematical Physics*. Cambridge 2004. *Bibl. Física A02-454*.
- 3.4 Y. Choquet-Bruhat, et. al. *Análisis, Manifolds and Physics*. North Holland.
- 3.5 Sigurdür Helgason. *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*. Academic Press, 1962. *Bibl. Fis. A02-259*.
- 3.6 E.R. Rozendorn, *170 problemas de Geometría Diferencial*. Ed. URSS.

Capítulo 1

Espacios Lineales

1.1. Espacios Vectoriales

1.1.0.1 **Definición:** Un *Espacio vectorial* (o *lineal*) sobre un cuerpo Ω , es una terna $(V, +, \cdot)$ formada por un conjunto no vacío V , y dos aplicaciones $+ : V \times V \rightarrow V$ y $\cdot : \Omega \times V \rightarrow V$, llamadas respectivamente *suma* y *producto externo*, que satisfacen las siguientes propiedades

EV1. (asociatividad) $|\mathbf{x}\rangle + (|\mathbf{y}\rangle + |\mathbf{z}\rangle) = (|\mathbf{x}\rangle + |\mathbf{y}\rangle) + |\mathbf{z}\rangle$.

EV2. (elemento neutro) $|\mathbf{x}\rangle + |\mathbf{0}\rangle = |\mathbf{0}\rangle + |\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{x}\rangle$.

EV3. (elemento opuesto) $|\mathbf{x}\rangle + |-\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{0}\rangle$.

EV4. (conmutatividad) $|\mathbf{x}\rangle + |\mathbf{y}\rangle = |\mathbf{y}\rangle + |\mathbf{x}\rangle$.

EV5. $a(b|\mathbf{x}\rangle) = (ab)|\mathbf{x}\rangle$

EV6. (distributividad) $a(|\mathbf{x}\rangle + |\mathbf{y}\rangle) = a|\mathbf{x}\rangle + b|\mathbf{y}\rangle$

EV7. (distributividad) $(a + b)|\mathbf{x}\rangle = a|\mathbf{x}\rangle + b|\mathbf{x}\rangle$

EV8. $1|\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{x}\rangle$

Ejercicio: repasa las definiciones de *cuerpo*, *anillo*, *grupo*, *módulo*, y utilízalas para dar la definición más compacta posible de espacio vectorial.

Ejercicio: Intenta argumentar por qué los espacios vectoriales son relevantes en física.

1.1.0.2 A los elementos $\{|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle, \dots\}$ de V se les llama *vectores*, mientras que a $\{a, b, \dots\} \subset \Omega$ se les denomina *escalares*. Si $\Omega \equiv \mathbb{R}$, diremos que V es un *espacio vectorial real*, mientras que si $\Omega \equiv \mathbb{C}$, hablaremos de un *espacio vectorial complejo*.

1.1.1. Base y Dimensión

1.1.1.1 Independencia Lineal.

Un subconjunto de n vectores, $X \in V$, se dice que es *linealmente independiente* (l.i.), si la igualdad $a_1|\mathbf{x}_1\rangle + \dots + a_n|\mathbf{x}_n\rangle = 0$ sólo tiene por solución $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$. De lo contrario, decimos que X es un conjunto de vectores *linealmente dependientes* (l.d.).

1.1.1.2 Dimensión Lineal.

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo Ω . Si V contiene un conjunto de d vectores l.i., y cualquier otro conjunto de $d + 1$ vectores es l.d., decimos que la *dimensión lineal* de V es d , y escribimos $\dim_{\Omega} V = d$. Si no hay límite para el cardinal de un conjunto l.i., decimos que V tiene *dimensión lineal infinita*.

1.1.1.3 Base Lineal.

Decimos que un subconjunto $B \subset V$, forma una *base lineal* o *de Hammet* de V , cuando además de ser l.i., sea maximal, es decir, no esté contenido propiamente en ningún otro subconjunto l.i. de V .

La dimensionalidad depende del cuerpo Ω sobre el que esté construido nuestro espacio vectorial. Por ejemplo, si $d < \infty$ podemos mostrar que $\dim_{\mathbb{R}} V = 2\dim_{\mathbb{C}} V$. En efecto, si $B = \{|\mathbf{x}_1\rangle, \dots, |\mathbf{x}_d\rangle\}$ forman una base del espacio vectorial complejo V , entonces, $B' = \{|\mathbf{x}_1\rangle, i|\mathbf{x}_1\rangle, \dots, |\mathbf{x}_d\rangle, i|\mathbf{x}_d\rangle\}$ forma una base del mismo espacio vectorial, entendido como espacio vectorial real, ya que $|\mathbf{x}_i\rangle$ y $i|\mathbf{x}_i\rangle$ son vectores linealmente independientes en un espacio vectorial real, pero no lo son en un espacio vectorial complejo.

1.1.1.4 Conjunto Numerable, Potencia

En el caso de dimensión infinita, aun podemos afinar un poco más, y comparar V con algunos conjuntos conocidos de cardinalidad infinita, como los naturales \mathbf{N} cuya cardinalidad coincide con la de los racionales \mathbf{Q} , o los reales \mathbb{R} cuya cardinalidad coincide con la de los complejos \mathbb{C} . La cardinalidad de \mathbf{N} se denomina \aleph_0 (alef).

Decimos que un conjunto es *numerable* cuando su cardinalidad coincide con la de los naturales. Es decir, cuando es posible establecer una aplicación uno a uno entre los elementos de dicho conjunto y los números naturales. Por ejemplo, \mathbf{Q} constituye un conjunto numerable. Sin embargo \mathbb{R} no es numerable y decimos que su *potencia* es superior a la de \mathbf{Q} . La cardinalidad de \mathbb{R} se denota \aleph .

Ejemplos:

1. \mathbb{R} . La recta real, $x \in \mathbb{R}$, con la operación usual de adición $x + y = z$ y multiplicación por números reales $ax = y$ es un espacio vectorial, $x \rightarrow |x\rangle$.
2. \mathbb{R}^3 . El espacio vectorial complejo, consistente en el conjunto de los triples ordenados de números complejos $|\mathbf{x}\rangle = (x_1, x_2, x_3), x_i \in \mathbb{R}$. Una base para este espacio la constituyen los tres vectores $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. La generalización de este caso a un cuerpo y dimensión arbitrarios se denomina *producto cartesiano* Ω^n .
3. $\Omega^{\mathbf{N}}$, consta en ∞ -tuplas, es decir, de elementos $|\mathbf{a}\rangle = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$, con $a_i \in \Omega$. Así $|\mathbf{a}\rangle + |\mathbf{b}\rangle = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n, \dots)$ y $\lambda|\mathbf{a}\rangle = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n, \dots)$. Este espacio tiene dimensión infinita.
4. $M_{\mathbf{N}}^{\Omega}$, consta de matrices infinitas $\{|\mathbf{M}\rangle = M^i_j \in \Omega, i, j \in \mathbf{N}\}$.
5. $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ funciones continuas de variable real n veces derivables. $f(x) \rightarrow |\mathbf{f}\rangle$ con $x \in \mathbb{R}$ y $f^{(n)} < \infty$. La suma se define punto por punto $|\mathbf{f}\rangle + |\mathbf{g}\rangle = |\mathbf{h}\rangle \Leftrightarrow f(x) + g(x) = h(x) \forall x \in \mathbb{R}$. Podemos reemplazar \mathbb{R} por Ω .

1.1.2. Subespacios Vectoriales

1.1.2.1 Subespacio Vectorial Propio.

Un subespacio de un espacio vectorial, es un subconjunto $W \in V$, que a su vez es un espacio vectorial. Llamamos *propio* a un subespacio de dimensión *estrictamente menor* que la del espacio en el que está contenido.

1.1.2.2 Variedad Lineal.

Dado un subconjunto no vacío X de V , llamamos *variedad o envolvente lineal*, $\text{lin}(X)$, al mínimo subespacio vectorial que contiene a X .

Una consecuencia inmediata es que $\text{lin}(X) = \{|\mathbf{x}\rangle \in V / |\mathbf{x}\rangle = a_1|\mathbf{x}_1\rangle + \dots + a_p|\mathbf{x}_p\rangle\}$. Debemos hacer constar que el adjetivo “lineal” lleva implícita la idea de *sumas que involucran un número finito de términos*, independientemente de que el conjunto X sea finito o no.

Ejemplo: Sea $X = \{1, t, t^2, \dots, t^n, \dots\} \in C[0, 1]$. $\text{lin}(X)$ consiste por tanto en el espacio vectorial de polinomios en la variable t . En particular, la función e^t no pertenece a $\text{lin}(X)$ puesto que $e^t = \sum_0^\infty 1/n!t^n$.

Proposición: Si B es una base de V , entonces $V = \text{lin}(B)$. Dicho de otra manera, la descomposición $\forall |\mathbf{x}\rangle \in V$, $|\mathbf{x}\rangle = \sum_{i=1}^n a_i|\mathbf{x}_i\rangle$, existe y es única.

Demostración: Sea B una base de V . Por definición se trata de un subconjunto l.i. y maximal. Supongamos que existe un elemento $|\mathbf{x}\rangle \in V$ tal que $|\mathbf{x}\rangle \notin \text{lin}(B)$. Entonces podríamos ampliar B a $B' = \{B, x\}$ que sería l.i. y mayor que B , contradiciendo la hipótesis de que B es maximal. La unicidad se deja como ejercicio trivial.

1.1.2.3 Suma Lineal.

Decimos que un espacio V es la *suma lineal* de dos subespacios V_1 y V_2 , $V = V_1 \oplus V_2$, cuando todo elemento $|\mathbf{x}\rangle \in V$ puede ser escrito en forma única como $|\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{x}_1\rangle + |\mathbf{x}_2\rangle$ donde $|\mathbf{x}_1\rangle \in V_1$ y $|\mathbf{x}_2\rangle \in V_2$.

Esta definición se generaliza trivialmente a la suma directa de varios espacio vectoriales.

1.2. Espacios Lineales Normados

1.2.0.4 Distancia, Métrica.

Un *espacio métrico* (no necesariamente espacio lineal) es un par (X, d) , compuesto por un *conjunto* de elementos X , y de una noción de *distancia entre ellos*, es decir, una función definida sobre pares ordenados de elementos $|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle \in X$, tal que se verifican las propiedades siguientes

- D1.** (simetría) $d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) = d(|\mathbf{y}\rangle, |\mathbf{x}\rangle)$,
- D2.** $d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{x}\rangle) = 0$,
- D3.** $d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) > 0$ si $|\mathbf{x}\rangle \neq |\mathbf{y}\rangle$,
- D4.** $d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) \leq d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{z}\rangle) + d(|\mathbf{z}\rangle, |\mathbf{y}\rangle)$ para todo $|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle, |\mathbf{z}\rangle \in X$.

1.2.0.5 Norma.

Un espacio vectorial V sobre Ω , se dice que es *normado* cuando existe una aplicación (norma) $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\forall |\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle \in V, \forall a \in \Omega$ se verifican las siguientes propiedades

- N1.** (positividad) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$,
- N2.** (unicidad de la norma del cero) $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$,
- N3.** (homogeneidad) $\|a|\mathbf{x}\rangle\| = |a| \|\mathbf{x}\|$,
- N4.** (desigualdad triangular o de Minkowski) $\|\mathbf{x}\rangle + |\mathbf{y}\rangle\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Cuando queramos hacer referencia explícita a la norma, escribimos para un espacio normado, el par $(V, \|\cdot\|)$.

1.2.0.6

Todo *espacio normado* es un *espacio métrico*, en el que la *distancia* viene definida por la *norma* a través de la igualdad

$$d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) = \|\mathbf{x}\rangle - |\mathbf{y}\rangle\|. \quad (1.1)$$

Es importante destacar la diferencia entre *norma* y *distancia*. Para empezar la definición de norma requiere un espacio vectorial, mientras que se puede definir una distancia sobre un conjunto arbitrario. Pero incluso en el contexto de espacios vectoriales, aunque ya se ha dicho que una norma define una distancia, lo contrario no es cierto en general.

Ejemplos:

1. $\Omega^n(\mathbb{R}^n \text{ ó } \mathbb{C}^n)$ con la norma *euclídea* $\|\cdot\|_p$ definida por:

$$\|\mathbf{x}\rangle\|_p = \|(a_1, a_2, \dots, a_n)\rangle\|_p \equiv \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{1/p}$$

es un espacio lineal normado.

2. El espacio M_m^Ω de matrices $m \times m$ cuyos elementos toman valores en Ω , puede dotarse de una norma. Sea $M \in M_m^\Omega$, una matriz con elementos M^i_j , definimos

$$\|\mathbf{M}\rangle\|_p = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |M^i_j|^p \right)^{1/p}. \quad (1.2)$$

3. Sobre $\Omega^{\mathbb{N}}$ podemos construir los siguientes subespacios lineales normados

$$\begin{aligned} l_\Omega^p &\equiv \{|\mathbf{x}\rangle = (a_1, a_2, \dots) \in \Omega^{\mathbb{N}} \mid \|\mathbf{x}\rangle\|_p \equiv \left(\sum_j |a_j|^p \right)^{1/p} < +\infty\}, \quad 1 \leq p < +\infty \\ l_\Omega^\infty &\equiv \{|\mathbf{x}\rangle = (a_1, a_2, \dots) \in \Omega^{\mathbb{N}} \mid \|\mathbf{x}\rangle\|_\infty \equiv \sup_n |a_n| < +\infty\} \end{aligned} \quad (1.3)$$

4. Igualmente, sobre un subespacio del espacio vectorial de las matrices infinitas, podemos definir

$$m_\Omega^p = \{|\mathbf{M}\rangle \in M_{\mathbb{N}}^\Omega \mid \|\mathbf{M}\rangle\|_p = \left(\sum_{i,j=1}^\infty |M^i_j|^p \right)^{1/p} < \infty\} \quad (1.4)$$

5. Sea K un conjunto compacto de Ω^n , y sea $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ el espacio vectorial formado por todas las funciones $f : K \rightarrow \Omega$ continuas sobre K , investido de la norma

$$\|\mathbf{f}\rangle\|_\infty \equiv \sup_K |f(x)|$$

6. $C(K)$ admite otras estructuras normadas, como por ejemplo $(C(K), \|\cdot\|_p)$ con

$$\|\mathbf{f}\|_p \equiv \left| \int_K |f(x)|^p dx \right|^{1/p}$$

7. $L^p(K)$. Si relajamos el requisito de continuidad en el ejemplo anterior llegamos al siguiente espacio vectorial normado de gran importancia: $L^p(K)$ es el conjunto de funciones f que verifican $\|f\|_p \equiv \left| \int_K |f|^p dx \right|^{1/p} < +\infty$. L^p es un espacio normado, con la norma $\|\cdot\|_p$.

Ejercicios:

- (a) Demostrar sobre l^2_Ω que: $\sum_i |a_i b_i|^2 \leq \sum_j |a_j|^2 \sum_k |b_k|^2$.
- (b) Probar que $\forall |\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle \in V$ se cumple $\| |\mathbf{x}\rangle \| - \| |\mathbf{y}\rangle \| \leq \| |\mathbf{x}\rangle - |\mathbf{y}\rangle \|$.
- (c) Sean $|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle \in L^2[a, b]$. Demostrar que $(a|\mathbf{x}\rangle + b|\mathbf{y}\rangle) \in L^2[a, b]$.

1.3. Convergencia de Sucesiones.

La introducción de una norma nos permite definir una noción de convergencia con la cual ahora podremos permitir combinaciones lineales no-finitas.

1.3.0.7 ϵ -vecindad.

Una bola abierta (cerrada) $B(|\mathbf{x}_0\rangle, r)$ ($B[|\mathbf{x}_0\rangle, r]$), es el conjunto de elementos $|\mathbf{x}\rangle \in V$ que verifican $\| |\mathbf{x}\rangle - |\mathbf{x}_0\rangle \| < r$, ($\leq r$). Una bola abierta de radio ϵ se denomina también una ϵ -vecindad de $|\mathbf{x}_0\rangle$, y se denota $O_\epsilon(|\mathbf{x}_0\rangle)$.

1.3.0.8 Punto de Adherencia.

Sea $M \subset V$. Un vector $|\mathbf{x}\rangle \in V$ se denomina, *punto de adherencia* de M , si cualquier vecindad suya contiene al menos un punto de M .

Si $|\mathbf{x}\rangle \in M$ trivialmente es un punto de adherencia. Pero además existen puntos de adherencia en V que no pertenecen a M . Por ejemplo, sea $V = \mathbb{R}$, y $M = [0, 1)$. El punto 1 es de adherencia.

El conjunto formado por la unión de M con todos sus puntos de adherencia se denomina *adherencia* o también *clausura* de M y se denota con \overline{M} .

1.3.0.9 Cerrado, Denso, Separable.

- a) Un subconjunto $M \subset V$, decimos que es *cerrado*, si coincide con su adherencia, $\overline{M} = M$.
- b) Sean $M, N \subset V$ dos subconjuntos. Decimos que M es *denso* en N cuando $\overline{M} \supset N$.
- c) Un subconjunto $M \subset V$ se dice que es *siempre denso* en V , cuando $\overline{M} = V$.
- d) Un espacio normado $(V, \|\cdot\|)$ se dice que es *separable*, cuando existe un subconjunto numerable, siempre denso en V .

El ejemplo clásico de subconjunto siempre denso en \mathbb{R} es \mathbb{Q} . Por ser además, \mathbb{Q} un conjunto numerable, \mathbb{R} es separable.

1.3.1. Convergencia de sucesiones y series en espacios normados

1.3.1.1 Sucesión Convergente.

Una sucesión $\{|\mathbf{x}_n\rangle\}_1^\infty$ de elementos de V , decimos que *converge (fuertemente)* a un elemento $|\mathbf{x}_0\rangle$ de V , simbólicamente $|\mathbf{x}_n\rangle \rightarrow |\mathbf{x}_0\rangle$, si $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ con $|\mathbf{x}_0\rangle \in V$. Decimos que $|\mathbf{x}_0\rangle$ es el *límite* de la sucesión.

La convergencia de sucesiones es una herramienta útil para caracterizar puntos de adherencia.

Lema: Dado un subconjunto $M \subset V$, y un vector $|\mathbf{x}\rangle \in V$, $|\mathbf{x}\rangle$ es un punto de adherencia de M , (i.e. $|\mathbf{x}\rangle \in \overline{M}$), si y sólo si existe una sucesión $\{|\mathbf{s}_n\rangle\}_1^\infty \subset M$, tal que $|\mathbf{s}_n\rangle \rightarrow |\mathbf{x}\rangle$.

Demostración:

[\Rightarrow] Si $|\mathbf{x}\rangle \in M \subset \overline{M}$ entonces el enunciado se cumple con la sucesión trivial $|\mathbf{s}_n\rangle = |\mathbf{x}\rangle, \forall n$. Supongamos que $|\mathbf{x}\rangle \notin M$, pero $|\mathbf{x}\rangle \in \overline{M}$. Por ser un punto de adherencia, toda ϵ -vecindad de $|\mathbf{x}\rangle$ $O_\epsilon(|\mathbf{x}\rangle)$, contiene al menos un elemento de M . Sea la sucesión $\{\epsilon_n\}_1^\infty$ con $\epsilon_n = 1/n$, podemos tomar un elemento $|\mathbf{s}_n\rangle \in M$ de cada entorno $O_{1/n}(|\mathbf{x}\rangle)$, y definir de esta manera la sucesión una $\{|\mathbf{s}_n\rangle\}_1^\infty$, convergente a $|\mathbf{x}\rangle$.

[\Leftarrow] Trivial. ■

1.3.1.2 Convergencia de Series.

Se dirá que, dados $|\mathbf{v}_n\rangle \in (V, \|\cdot\|)$, la serie $\sum_{i=1}^\infty |\mathbf{v}_i\rangle$ converge hacia $|\mathbf{v}\rangle \in V$, si la sucesión de sumas parciales $|\mathbf{s}_n\rangle = \sum_{i=1}^n |\mathbf{v}_i\rangle$ converge a $|\mathbf{v}\rangle$, i.e. $\|\mathbf{s}_n - \mathbf{v}\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Es necesario recordar que tal operación $\sum_{i=1}^\infty$ para vectores es posible porque sobre V hay una norma definida. No es por tanto una mera operación formal algebraica de suma, sino que además es necesario darle sentido controlando su *distancia* a cualquier elemento del espacio vectorial.

Vemos que, en contraste con lo que pasaba al trabajar con espacios lineales sin norma, en los que tan sólo se permitía efectuar sumas *finitas*, y producto por escalares, ahora podemos admitir sumas *infinitas* gracias a la introducción de la norma.

1.3.2. Espacios Completos

1.3.2.1 Sucesión de Cauchy.

Una sucesión $\{|\mathbf{y}_n\rangle\}_1^\infty$ de elementos de V , decimos que es *sucesión de Cauchy* (o *fundamental*), si $\|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_m\| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$, es decir, si $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0$ tal que $\|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_m\| < \epsilon, \forall n, m > N$.

Proposición: Toda sucesión convergente en $(V, \|\cdot\|)$, es de Cauchy.

Demostración: se deduce de la desigualdad triangular N4:

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\| \leq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| + \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_m\| \rightarrow 0 \quad \blacksquare$$

Sin embargo, Cauchy $\not\Rightarrow$ convergente. Es este un inconveniente que hace extremadamente útiles aquellos casos de espacios en los que se pueda asegurar la convergencia de sucesiones de Cauchy.

1.3.2.2 Espacio Completo.

Un espacio normado, $(V, \|\cdot\|)$, se dice que es *completo en la norma asociada*, o de *Banach*¹, cuando toda sucesión de Cauchy es también convergente en V .

1.3.2.3 La relación entre *completo* y *cerrado* puede llevar a confusión. Por eso vamos a comentarla un poco. Decimos que un subconjunto no vacío $M(V, \|\cdot\|)$ es completo, si toda sucesión de Cauchy $\{\mathbf{x}_n\}_1^\infty \subset M$ converge en M .

Proposición: Si $(V, \|\cdot\|)$ es completo, y $M \subset (V, \|\cdot\|)$ un subconjunto no vacío, entonces: M completo $\Leftrightarrow M$ cerrado.

Demostración:

[\Rightarrow] Si $\{\mathbf{x}_n\} \subset M$ es tal que $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{y} \in V$, entonces por un lado $\{\mathbf{x}_n\}$ es de Cauchy y por otro es de M , luego si M es completo la sucesión converge en M .

[\Leftarrow] Dado \overline{M} cerrado, si $\{\mathbf{x}_n\} \subset M$ es de Cauchy, debe converger en V (completo) hacia $\mathbf{y} \in \overline{M} = M$, luego M es completo. ■

Ejemplos:

1. El conjunto de los \mathbb{Q} es el ejemplo clásico de conjunto no completo en la norma euclídea $\|\cdot\|_2$. Por el contrario los reales, \mathbb{R} , sí constituyen un conjunto completo. Análogamente \mathbb{R}^n y \mathbb{C}^n son conjuntos completos y separables en la misma norma.
2. Sea V un espacio vectorial real (complejo). Existe un isomorfismo entre este espacio y el espacio vectorial \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n), que asocia a cada vector con el conjunto de sus componentes reales (complejas) en una determinada base. En virtud de la completitud de \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n), tenemos que *cualquier espacio vectorial de dimensión finita sobre \mathbb{R} (\mathbb{C}) es automáticamente completo y separable* al serlo estos conjuntos.
3. Sea $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ el espacio vectorial normado de funciones continuas sobre $[0, 1] \in \mathbb{R}$. El subconjunto \mathcal{P} de polinomios en $t \in [0, 1]$ es, a su vez, un subespacio lineal normado. El teorema de Weierstrass asegura que $\forall \mathbf{f} \in C[0, 1]$, existe alguna sucesión de polinomios $\{\mathbf{P}_n\}_1^\infty \rightarrow \mathbf{f}$ en la norma $\|\cdot\|_\infty$. Por tanto, si $\mathbf{f} \notin \mathcal{P}$, tenemos una sucesión de Cauchy que no es convergente en \mathcal{P} , pero sí lo es en $C[0, 1]$. Por tanto $(\mathcal{P}, \|\cdot\|_\infty)$ no es completo. Por el contrario, $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ sí es completo.
4. $L^p_{\mathbb{Q}}$ definido en 1.3, es completo.
5. $L^p[a, b]$ es completo.

Ejercicio: El concepto de completitud depende, no solo del espacio vectorial de partida, sino también de la norma utilizada. En particular, se pide demostrar que $(C[0, 1], \|\cdot\|_2)$ no es completo, mientras que $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ sí lo es. (Ayuda: definir alguna sucesión de funciones continuas que converja a una función no continua, como por ejemplo la función escalón).

1.3.2.4 Completación

Aunque el espacio V no sea completo, siempre puede ser incluido de cierta manera (y de hecho única) en un espacio completo: Sea V un espacio normado V . Un espacio normado \tilde{V} se denomina *completación* de V , si:

- 1.) V es un subespacio de \tilde{V} .

¹Stefan Banach, matemático polaco (1892-1945).

2.) V es siempre denso en \tilde{V} , es decir $\overline{V} = \tilde{V}$.

Teorema: *Todo espacio vectorial normado V admite una completación \tilde{V} , donde \tilde{V} es un espacio vectorial normado y completo, única salvo isomorfismos en norma².*

Demostración: Sigue las pautas generales que se utilizan para construir \mathbb{R} a partir de \mathbb{Q} . Se completa V añadiendo elementos “ideales”, clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy sin límite en V . La estructura lineal normada se extiende a \tilde{V} por continuidad, pues V es denso en \tilde{V} (ver ref. [Kol], pág. 76).

Ejemplos:

1. \mathbb{R} es la completación de \mathbb{Q} .
2. $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ es la completación de $(\mathcal{P}[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$.
3. $L^p[a, b]$ es la completación de $C[a, b]$ en la norma $\|\cdot\|_p$.

1.4. Espacios Lineales con Producto Escalar

Vamos a introducir un poco más de estructura en un espacio vectorial. La norma es un instrumento que permite asociar un número positivo (longitud) a cada vector. Con el producto escalar podemos generalizar conceptos como ángulo o perpendicularidad, propios de la geometría euclídea clásica.

1.4.0.5 Definición de Producto Escalar.

Sea V un espacio vectorial sobre $\Omega(\mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C})$. Por un *producto escalar* sobre V entendemos una aplicación $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \Omega$, denotada por $|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle \rightarrow (|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle)$ que cumple:

PE1. (positividad) $(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{x}\rangle) \geq 0$, y $(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{x}\rangle) = 0 \Leftrightarrow |\mathbf{x}\rangle = 0$.

PE2. (linealidad) $(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle + |\mathbf{z}\rangle) = (|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) + (|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{z}\rangle)$

PE3. (homogeneidad) $(|\mathbf{x}\rangle, a|\mathbf{y}\rangle) = a(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle)$

PE4. (hermiticidad) $(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) = (|\mathbf{y}\rangle, |\mathbf{x}\rangle)^*$

La definición anterior es equivalente a afirmar que sobre el espacio vectorial hay definida una *forma sesquilineal* o *hermítica*. Llamamos, *espacio con producto escalar* al par $(V, (\cdot, \cdot))$.

La introducción de un producto escalar permite describir propiedades de carácter geométrico como ángulos y proyecciones.

1.4.0.6 Ortogonalidad

Sea $(V, (\cdot, \cdot))$ un espacio con producto escalar. Dos vectores $|\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{w}\rangle \in H$, se dice que son *ortogonales*, $|\mathbf{v}\rangle \perp |\mathbf{w}\rangle$, si

$$(|\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{w}\rangle) = 0.$$

Asímismo, decimos que un subconjunto $S = \{|\mathbf{v}_\alpha\rangle\}_{\alpha \in J} \subset V$ es *ortogonal* cuando todos sus elementos son ortogonales dos a dos. Si además $(|\mathbf{v}_\alpha\rangle, |\mathbf{v}_\alpha\rangle) = 1, \forall \alpha \in J$ decimos que S es *ortonormal*.

Dos conjuntos de vectores $S_1, S_2 \subset (V, (\cdot, \cdot))$ son mutuamente ortogonales, $S_1 \perp S_2$, cuando $(|\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle) = 0 \forall |\mathbf{v}_1\rangle \in S_1, |\mathbf{v}_2\rangle \in S_2$. Se sigue inmediatamente de las propiedades de linealidad del producto escalar que $\text{lin}(S_1) \perp \text{lin}(S_2) \Leftrightarrow S_1 \perp S_2$.

²Dos espacios lineales normados V_1 y V_2 se dice que son *isomorfos en norma*, si \exists un isomorfismo lineal $T : V_1 \rightarrow V_2$, que es isométrico en el sentido de que $\|T\mathbf{x}\|_{V_2} = \|\mathbf{x}\|_{V_1}, \forall |\mathbf{x}\rangle \in V_1$

1.4.1. Norma inducida por un producto escalar

1.4.1.1 Norma asociada

En $(V, (\cdot, \cdot))$ la aplicación $|\mathbf{x}\rangle \rightarrow \|\mathbf{x}\| \equiv \sqrt{(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{x}\rangle)}$ define una norma. La única propiedad no trivial que hay que verificar es la *desigualdad triangular N4* (ver más abajo).

1.4.1.2 Teorema: (de Pitágoras generalizado): Si $S = \{|\mathbf{v}_j\rangle\}_{j \in J}$ es un subconjunto ortonormal finito en $(V, (\cdot, \cdot))$, tenemos que $\forall |\mathbf{v}\rangle \in V$ se cumple

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \sum_{j \in J} |(|\mathbf{v}_j\rangle, |\mathbf{v}\rangle)|^2 + \|\mathbf{v}\rangle - \sum_{j \in J} (|\mathbf{v}_j\rangle, |\mathbf{v}\rangle) |\mathbf{v}_j\rangle\|^2.$$

Demostración: Sea $|\mathbf{d}\rangle = |\mathbf{v}\rangle - \sum_{j \in J} (|\mathbf{v}_j\rangle, |\mathbf{v}\rangle) |\mathbf{v}_j\rangle$, es fácil ver que $|\mathbf{v} - \mathbf{d}\rangle \perp |\mathbf{d}\rangle$. Entonces $(|\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{v}\rangle) = ((|\mathbf{v} - \mathbf{d}\rangle) + |\mathbf{d}\rangle, (|\mathbf{v} - \mathbf{d}\rangle) + |\mathbf{d}\rangle) = \|\mathbf{v} - \mathbf{d}\|^2 + \|\mathbf{d}\|^2$. Igualmente $\|\mathbf{v} - \mathbf{d}\|^2 = \sum_{j \in J} |(|\mathbf{v}_j\rangle, |\mathbf{v}\rangle)|^2 \|\mathbf{v}_j\|^2 = \sum_{j \in J} |(|\mathbf{v}_j\rangle, |\mathbf{v}\rangle)|^2$ ■

1.4.1.3 Corolario: (Desigualdad finita de Bessel)

Si $\{|\mathbf{v}_j\rangle\}_{j \in J}$ es subconjunto ortonormal finito de $(V, (\cdot, \cdot))$ se tiene $\forall |\mathbf{v}\rangle \in V$

$$\|\mathbf{v}\|^2 \geq \sum_{j \in J} |(|\mathbf{v}_j\rangle, |\mathbf{v}\rangle)|^2. \quad (1.5)$$

1.4.1.4 Proposición: (Desigualdad de Schwarz)

$\forall |\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle \Rightarrow |(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle)| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$. Además cuando se satura la desigualdad, $|\mathbf{x}\rangle$ e $|\mathbf{y}\rangle$ son proporcionales ($|\mathbf{x}\rangle = \lambda |\mathbf{y}\rangle$).

Demostración: Si $|\mathbf{x}\rangle = 0$ es trivial, por tanto supondremos que $|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle \neq 0$. En este caso es una consecuencia elemental de la desigualdad de Bessel. En efecto tomando el conjunto l.i. ortonormal, como constituido por un sólo elemento $\{|\mathbf{v}_j\rangle\}_{j \in J} = \{|\mathbf{y}\rangle/\|\mathbf{y}\|\}$, 1.5 se reduce a la afirmación

$$\|\mathbf{x}\| \geq \left| \left(|\mathbf{x}\rangle, \frac{|\mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{y}\|} \right) \right| = \frac{1}{\|\mathbf{y}\|} |(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle)| \quad (1.6)$$

1.4.1.5 Proposición: (Desigualdad Triangular o de Minkowski)

Dados $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\rangle + |\mathbf{w}\rangle\|^2 &= \|\mathbf{v}\rangle\|^2 + \|\mathbf{w}\rangle\|^2 + 2\text{Re}(|\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{w}\rangle) \\ &\leq \|\mathbf{v}\rangle\|^2 + \|\mathbf{w}\rangle\|^2 + 2|(|\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{w}\rangle)| \\ &\leq \|\mathbf{v}\rangle\|^2 + \|\mathbf{w}\rangle\|^2 + 2\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \\ &= (\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|)^2 \end{aligned} \quad (1.7)$$

según la desigualdad de Schwarz. ■

Definición: *convergencia débil.* Sea $\{|\mathbf{x}_n\rangle\}_1^\infty$ una sucesión de elementos de $(V, (\cdot, \cdot))$. Decimos que *converge débilmente* hacia $|\mathbf{x}\rangle$, $\{|\mathbf{x}_n\rangle\}_1^\infty \rightarrow |\mathbf{x}\rangle$ si

$$(|\mathbf{y}\rangle, |\mathbf{x}_n\rangle) \rightarrow (|\mathbf{y}\rangle, |\mathbf{x}\rangle) \quad , \quad \forall |\mathbf{y}\rangle \in V.$$

Teorema: Convergencia fuerte implica convergencia débil. Es decir, si $\{|\mathbf{x}_n\rangle\}_1^\infty \rightarrow |\mathbf{x}\rangle$ e $\{|\mathbf{x}_n\rangle\}_1^\infty \rightarrow x$. *Demostración:* Para todo $\mathbf{y} \in V$

$$|(|\mathbf{y}\rangle, |\mathbf{x}_n\rangle) - (|\mathbf{y}\rangle, |\mathbf{x}\rangle)| = |(|\mathbf{y}\rangle, |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\rangle)| \leq \|\mathbf{y}\| \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| \rightarrow 0 \blacksquare$$

La implicación inversa no ocurre necesariamente.

Ejemplos de Espacios con Producto Escalar

1. Ω^n admite una estructura de espacio con producto escalar, con la definición

$$(|\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{w}\rangle) \equiv \sum_{j=1}^n \bar{a}_j b_j \quad \text{para } v = (a_1, \dots, a_n), \quad w = (b_1, \dots, b_n).$$

2. l^2_Ω , con el producto escalar de $|\mathbf{v}\rangle = \{a_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$, $|\mathbf{w}\rangle = \{b_\beta\}_{\beta \in \mathbb{N}}$.

$$(|\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{w}\rangle) \equiv \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \bar{a}_\alpha b_\alpha$$

3. $C(K)$, con $K \subset \mathbb{R}$ un compacto, y producto escalar:

$$(|\mathbf{f}\rangle, |\mathbf{g}\rangle) \equiv \int_K \bar{f}(x)g(x) dx.$$

4. $L^2(\mathbb{R})$ con producto escalar:

$$(|\mathbf{f}\rangle, |\mathbf{g}\rangle) \equiv \int_{\mathbb{R}} \bar{f}(x)g(x) dx$$

y análogamente para $L^2[a, b]$.

El espacio l^p_Ω es un espacio normado, pero no existe ningún producto escalar que induzca la norma asociada, salvo para $p = 2$ (c.f. [Ave] pág.80).

1.5. Espacios de Hilbert

Recordemos que todo espacio normado admite una única extensión a un espacio completo. Esta *completación* es extremadamente útil pues en ella encuentran su límite todas las sucesiones de Cauchy que no convergían en el espacio normado original. Un espacio vectorial con producto escalar induce una norma única, y por tanto, salvo isomorfismos en norma, también admite una única completación:

1.5.0.6 Espacio de Hilbert.

Un *espacio de Hilbert*, es un espacio vectorial *con producto escalar* $(V, (\cdot, \cdot))$ *completo* en la norma asociada.

Ejemplos de Espacios de Hilbert:

1. \mathbb{R}^n , \mathbb{C}^n y M_N^Ω son espacios de Hilbert
2. l^2_Ω y M_∞^Ω son Hilbert
3. $L^2(\mathbb{R}^n)$ y $L^2[a, b]$ son espacios de Hilbert.

1.5.0.7 Complemento Ortogonal

Sea M un subconjunto de un espacio de de Hilbert H . Denotamos por *complemento ortogonal* de M en H , M^\perp , a

$$M^\perp \equiv \{|\mathbf{v}\rangle \in H / |\mathbf{v}\rangle \perp M\} \tag{1.8}$$

A veces se escribe también $M^\perp = H \ominus M$.

Teorema 1.5.1 (fundamental de la proyección ortogonal) Si M es un subespacio lineal cerrado de un espacio de Hilbert H , entonces $\forall |\mathbf{v}\rangle \in H$

$$|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{v}_1\rangle + |\mathbf{v}_2\rangle \quad , \quad \text{con } |\mathbf{v}_1\rangle \in M, |\mathbf{v}_2\rangle \in M^\perp \quad (1.9)$$

y tal descomposición es única.

Demostración: (c.f. [Ave] pág. 86).

A $|\mathbf{v}_1\rangle$ del enunciado anterior se le denomina *proyección ortogonal* de $|\mathbf{v}\rangle$ sobre M .

Definición: Dados subespacios lineales cerrados $M, N \subset H$, diremos que H es *suma directa ortogonal* de ambos, simbólicamente, $H = M \oplus N$ si además de ser suma directa $H = M \oplus N$, se cumple $M \perp N$. El teorema anterior afirma que para todo subespacio cerrado $M \subset H$, se cumple que $H = M \oplus M^\perp$.

1.5.1. Bases

Sea $S = \{|\mathbf{f}_\alpha\rangle\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ donde \mathcal{I} un conjunto finito o infinito de índices. Recordemos que S es base de un espacio de Hilbert *base* H , si es maximal, es decir si no es subconjunto propio de ningún otro conjunto linealmente independiente de H .

En un espacio de Hilbert, podemos formar la matriz de productos escalares elementales de los elementos de una base

$$g_{\alpha\beta} = (|\mathbf{f}_\alpha\rangle, |\mathbf{f}_\beta\rangle) \quad , \quad \alpha, \beta \in \mathcal{I} \quad (1.10)$$

1.5.1.1 Teorema de Gram-Schmidt

Cualquier conjunto finito o infinito numerable de vectores l.i. de un espacio de Hilbert puede ortonormalizarse, tal y como afirma el siguiente teorema:

Teorema 1.5.2 (Gram-Schmidt) Sea $\{|\mathbf{v}_j\rangle\}_{j \in J} \subset H$ un conjunto l.i. con J finito ($\{1, 2, \dots, n\}$) o infinito numerable (\mathbb{N}). Entonces $\exists \{|\mathbf{u}_j\rangle\}_{j \in J}$ ortonormal tal que $\text{lin}(\{|\mathbf{v}_j\rangle\}_{j \in J}) = \text{lin}(\{|\mathbf{u}_j\rangle\}_{j \in J})$.

Demostración: Hagamos

$$\begin{aligned} |\mathbf{w}_1\rangle &\equiv |\mathbf{v}_1\rangle & , & \quad |\mathbf{u}_1\rangle \equiv \frac{|\mathbf{w}_1\rangle}{\| |\mathbf{w}_1\rangle \|} \\ |\mathbf{w}_2\rangle &\equiv |\mathbf{v}_2\rangle - (|\mathbf{u}_1\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle)|\mathbf{u}_1\rangle & , & \quad |\mathbf{u}_2\rangle \equiv \frac{|\mathbf{w}_2\rangle}{\| |\mathbf{w}_2\rangle \|} \\ \vdots & & & \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ |\mathbf{w}_m\rangle &\equiv |\mathbf{v}_m\rangle - \sum_{k=1}^{m-1} (|\mathbf{u}_k\rangle, |\mathbf{v}_m\rangle)|\mathbf{u}_k\rangle & , & \quad |\mathbf{u}_m\rangle \equiv \frac{|\mathbf{w}_m\rangle}{\| |\mathbf{w}_m\rangle \|} \\ \vdots & & & \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \end{aligned} \quad (1.11)$$

Se comprueba directamente que el nuevo conjunto es ortogonal por construcción. $|\mathbf{w}_m\rangle$ no se anula en virtud de la supuesta independencia lineal de $\{|\mathbf{u}_j\rangle\}_{j \in J}$. Es evidente que las variedades lineales generadas son las mismas. ■

Ejercicio: Aplicar el proceso de Gram-Schmidt al sistema de funciones $\{1, x, x^2, x^3\} \in L^2[-1, +1]$.

1.5.1.2 Base Ortonormal

Un conjunto ortonormal de vectores $S = \{|\mathbf{e}_\alpha\rangle\}$ en un espacio de Hilbert es una *base ortonormal* de H , si es maximal, es decir si no es subconjunto propio de ningún otro conjunto ortonormal de H . La matriz de productos escalares elementales, viene dada por la delta de Kronecker

$$(|\mathbf{e}_\alpha\rangle, |\mathbf{e}_\beta\rangle) = \delta_{\alpha\beta}. \quad (1.12)$$

1.5.1.3 Desarrollo de un vector

Dada una base, cualquier vector puede expresarse como una combinación lineal finita o infinita

$$|\mathbf{v}\rangle = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} v_\alpha |\mathbf{e}_\alpha\rangle \quad (1.13)$$

La suma anterior, que en un espacio lineal debía restringirse a un conjunto finito de términos, ahora puede admitir sumas infinitas. En un espacio de Hilbert es posible tener un criterio para saber cuándo una suma infinita de vectores converge.

Lema 1.5.1 *Sea $\{|\mathbf{e}_j\rangle\}_{j=1}^\infty$ un conjunto ortonormal de vectores de H , espacio de Hilbert.*

$$\sum_1^\infty v_j |\mathbf{e}_j\rangle \text{ converge en } H \Leftrightarrow \sum_1^\infty |v_j|^2 \text{ converge en } \mathbb{R}$$

Demostración: $\sum_1^\infty v_j |\mathbf{e}_j\rangle$ converge en $H \Leftrightarrow$ la sucesión de sumas parciales es de Cauchy $\Leftrightarrow \|\sum_{m+1}^n v_j |\mathbf{e}_j\rangle\| \rightarrow 0, m, n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \sum_{m+1}^n |v_j|^2 \rightarrow 0 \Leftrightarrow \sum_1^\infty |v_j|^2$ es convergente en \mathbb{R} , al ser \mathbb{R} completo. ■

1.5.1.4 Componentes

Los coeficientes que expresan el desarrollo de un vector en una base ortonormal pueden recuperarse calculando la proyección del vector sobre el elemento de la base deseado. Las cantidades

$$v_\alpha = (|\mathbf{e}_\alpha\rangle, |\mathbf{v}\rangle) \quad (1.14)$$

reciben el nombre de *componentes covariantes* del vector $|\mathbf{v}\rangle$ en la base $|\mathbf{e}_\alpha\rangle$. La consistencia de (1.13) con (1.14) es consecuencia directa de la linealidad del producto escalar.

En dimensión finita, trabajar con bases ortonormales es elemental. En dimensión infinita la mayoría de los resultados se extienden directamente. Alguna prueba puede requerir un poco más de esfuerzo. Como mera ilustración incluimos aquí este complemento para que el lector perciba el tipo de sutilezas que surgen en las demostraciones cuando se trabaja en dimensión infinita.

Teorema 1.5.3 \exists de bases ortonormales *Todo espacio de Hilbert $\neq \{\emptyset\}$ posee alguna base ortonormal.*

Teorema 1.5.4 (Caracterización de bases ortonormales) *Sea $S = \{|\mathbf{e}_\alpha\rangle\}_{\alpha \in A}$ un conjunto ortonormal en un espacio de Hilbert H , donde A es un conjunto finito o infinito de índices. Denotaremos v_α el conjunto de productos escalares (componentes) $v_\alpha = (|\mathbf{e}_\alpha\rangle, |\mathbf{v}\rangle)$. Las siguientes proposiciones son equivalentes dos a dos.*

BO1. S es base ortonormal de H .

BO2. $\overline{\text{lin } S} = H$

BO3. $|\mathbf{v}\rangle \perp |\mathbf{e}_\alpha\rangle, (\forall \alpha \in A) \Rightarrow |\mathbf{v}\rangle = 0$. Es decir $S_\perp = \{0\}$.

BO4. $\forall |\mathbf{v}\rangle \in H \Rightarrow |\mathbf{v}\rangle = \sum_{\alpha} v_{\alpha} |\mathbf{e}_{\alpha}\rangle$ (Desarrollo de Fourier).

BO5. $\forall |\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{w}\rangle \in H \Rightarrow \langle |\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{w}\rangle \rangle = \sum_{\alpha} v_{\alpha}^* w_{\alpha}$ (Identidad de Parseval)

BO6. $\forall |\mathbf{v}\rangle \in H \Rightarrow \|\mathbf{v}\|^2 = \sum_{\alpha} |v_{\alpha}|^2$ (Identidad de Parseval)

Demostración: (Ver Avellanas, pág. 103.) Demostraremos solamente $(3 \Rightarrow 4)$.

Si A es finito entonces $|\mathbf{v}'\rangle = \sum_{\alpha \in A} v_{\alpha} |\mathbf{e}_{\alpha}\rangle$ es tal que $(|\mathbf{v}\rangle - |\mathbf{v}'\rangle) \perp |\mathbf{e}_{\alpha}\rangle$ y por **BO3** se sigue que $|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{v}'\rangle$. Veamos ahora el caso en que A es infinito. Demostraremos primero que, a $\sum_{\alpha \in A} v_{\alpha} |\mathbf{e}_{\alpha}\rangle$ sólo contribuyen una cantidad infinita numerable de términos.

Por la desigualdad finita de Bessel (1.5), \forall subconjunto finito $J \subset A$ de índices:

$$\sum_{\alpha \in J} |v_{\alpha}|^2 = \sum_{\alpha \in J} |(\mathbf{e}_{\alpha}, |\mathbf{v}\rangle)|^2 \leq \|\mathbf{v}\|^2.$$

Este hecho implica que en $\sum_{\alpha \in A} v_{\alpha} |\mathbf{e}_{\alpha}\rangle$ sólo hay una colección finita o, a lo sumo numerable, de términos no nulos. Efectivamente, dado un entero $n \in \mathbb{N}$ podemos formar el subconjunto de vectores $C_n \equiv \{|\mathbf{e}_{\alpha}\rangle, \alpha \in A | v_{\alpha} = (\mathbf{e}_{\alpha}, |\mathbf{v}\rangle) \geq 1/n\}$. En virtud de la desigualdad de Bessel

$$\sum_{|\mathbf{e}_{\alpha}\rangle \in C_n} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{|\mathbf{e}_{\alpha}\rangle \in C_n} |(\mathbf{e}_{\alpha}, |\mathbf{v}\rangle)| \leq \|\mathbf{v}\|^2,$$

vemos que C_n no puede contener más de $n^2 \|\mathbf{v}\|^2$ elementos, así que la unión $\cup_n C_n$ es un conjunto numerable.

En cualquiera de ambos casos tenemos que $\sum_{\alpha \in A} |v_{\alpha}|^2 \leq \|\mathbf{v}\|^2$. Definamos ahora la sucesión de sumas parciales $\{|\mathbf{w}_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ con $|\mathbf{w}_n\rangle \equiv \sum_{i=1}^n v_{\alpha_i} |\mathbf{e}_{\alpha_i}\rangle$. Esta sucesión es de Cauchy. En efecto

$$\|\mathbf{w}_n\rangle - \mathbf{w}_m\rangle\|^2 = \sum_{m+1}^n |v_{\alpha}|^2 \rightarrow 0, \quad \text{para } n > m \rightarrow \infty. \quad (1.15)$$

Por tanto podemos definir un vector en H como el límite $|\mathbf{v}'\rangle \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} |\mathbf{w}_n\rangle$. Un cálculo directo muestra que $|\mathbf{v}\rangle - |\mathbf{v}'\rangle \perp \forall |\mathbf{e}_{\alpha}\rangle$. Por tanto $|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{v}'\rangle$ en virtud de la hipótesis (BO3).

1.6. Espacios de Hilbert Separables

La dimensión de un espacio de Hilbert puede ser finita o infinita. En particular estamos interesados en al caso en el cual tiene dimensión \aleph_0 . Este es el caso de los Espacios de Hilbert separables.

Empezaremos por recordar que un *espacio de topológico* X , se llama *separable* si posee algún subconjunto numerable, siempre denso en X . Por ejemplo \mathbb{Q} es numerable y denso en \mathbb{R} , por tanto \mathbb{R} es separable. Lo mismo puede decirse de \mathbb{R}^n y de \mathbb{C}^n . En $C[a, b]$ los polinomios con coeficientes racionales forman un subconjunto numerable y denso.

Si V es un espacio vectorial separable y, con respecto a la norma inducida por (\cdot, \cdot) es un espacio de Hilbert, diremos que $(V, (\cdot, \cdot))$ es un espacio de Hilbert separable. En general nos restringiremos en adelante a espacios de Hilbert separables.

Teorema 1.6.1 *Un espacio de Hilbert, $H \neq \{0\}$, es separable si y sólo si admite una base ortonormal numerable (finita o infinita numerable).*

Demostración:

[\Rightarrow] Si H es separable $\exists D = \{|\mathbf{d}_j\rangle\}$, un conjunto numerable de vectores, siempre denso en H . Seleccionemos un subconjunto $\{|\mathbf{v}_j\rangle\}$ por el siguiente algoritmo de recurrencia: $|\mathbf{v}_1\rangle$ es el primer vector no nulo de D . Una vez elegidos, $|\mathbf{v}_1\rangle, \dots, |\mathbf{v}_k\rangle$, *l.i.* se toma como $|\mathbf{v}_{k+1}\rangle$ el próximo vector de D que sea linealmente independiente de los anteriores. Aplicando el método de Gram-Schmidt, producimos a partir de $\{|\mathbf{v}_j\rangle\}$ un conjunto ortonormal numerable $B = \{|\mathbf{e}_k\rangle\}$ con la propiedad de que $\text{lin}B = \text{lin}D$. D siempre denso $\Rightarrow \text{lin}D$ siempre denso $\Rightarrow \text{lin}B$ siempre denso $\Rightarrow \overline{\text{lin}B} = H$, y por el apartado **BO2** del teorema de caracterización de bases ortonormales, B es una base.

[\Leftarrow] Si H admite una base ortonormal $B = \{|\mathbf{e}_k\rangle\}$, entonces **BO2** de nuevo implica que $\text{lin}B$ siempre denso en H . Por hipótesis B es numerable, por tanto, un subconjunto numerable $M \subset H$ está formado por aquellas combinaciones lineales de vectores de B que involucran coeficientes racionales. Falta ver que M es siempre denso en H . Dados $|\mathbf{v}\rangle \in H, \epsilon > 0, \exists |\mathbf{w}\rangle \in \text{lin}B$ digamos, $|\mathbf{w}\rangle = \sum_1^n \lambda_j |\mathbf{e}_j\rangle$ tal que $\|v - w\| < \epsilon$. Luego, tomando números de racionales, ρ_j tales que verifiquen $|\lambda_j - \rho_j| < \epsilon/\sqrt{n}$, el vector $|\mathbf{w}'\rangle = \sum_1^n \rho_j |\mathbf{e}_j\rangle$ cumple:

$$\| |\mathbf{v}\rangle - |\mathbf{w}'\rangle \| \leq \| |\mathbf{v}\rangle - |\mathbf{w}\rangle \| + \| |\mathbf{w}\rangle - |\mathbf{w}'\rangle \| \leq 2\epsilon.$$

■

Corolario 1.6.1 *La dimensión de todos los espacios de Hilbert separables es o bien finita e igual a $d < \infty$ o bien infinita e igual a la cardinalidad de \mathbb{N} (\aleph_0).*

1.6.1. Teorema del Isomorfismo

Definición: Dos espacios de Hilbert sobre Ω , H_1 y H_2 , se dice que son *isomorfos* si existe algún isomorfismo lineal $U : H_1 \rightarrow H_2$ que conserva productos escalares, es decir que $(U|\mathbf{x}\rangle, U|\mathbf{y}\rangle)_{H_2} = (|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle)_{H_1}, \forall |\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle \in H_1$.

Teorema 1.6.2 (del isomorfismo) *Todo espacio vectorial de Hilbert separable H sobre Ω , es isomorfo a Ω^d si la dimensión hilbertiana de H ($d < \infty$), y a l_Ω^2 si la dimensión hilbertiana es infinita.*

Demostración: Sea $\{|\mathbf{e}_n\rangle\}_{n \in J}$ una base ortonormal de H donde $J = \{1, 2, \dots, d\}$ o bien $J = \mathbb{N}$. La aplicación $U : H \rightarrow l_\Omega^2$ definida por $U : |\mathbf{v}\rangle \in H \rightarrow |\mathbf{x}\rangle = \{(|\mathbf{e}_n\rangle, |\mathbf{v}\rangle)\}_{n \in J} \in l_\Omega^2$ establece el deseado isomorfismo, claramente lineal. Comprobemos que es una biyección. Es inyectiva porque

$$U|\mathbf{v}\rangle = U|\mathbf{w}\rangle \Rightarrow (|\mathbf{e}_n\rangle, |\mathbf{v}\rangle) = (|\mathbf{e}_n\rangle, |\mathbf{w}\rangle), \forall n \in J \Rightarrow |\mathbf{v}\rangle - |\mathbf{w}\rangle \perp \forall |\mathbf{u}_n\rangle \quad (1.16)$$

El único vector que satisface, ser ortogonal a todos los vectores de una base ortogonal es el $|\mathbf{0}\rangle \in H, \Rightarrow |\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{w}\rangle$. Además es suprayectiva pues dada cualquier colección de números $\lambda = \{\lambda_n\}_{n \in J} \in l_\Omega^2$ se tiene $\lambda_n = 0$, excepto a lo sumo para una subcolección de índices n_1, n_2, \dots . Si este conjunto es finito n_1, \dots, n_p el vector $|\mathbf{v}\rangle = \sum_{i=1}^p \lambda_{n_i} |\mathbf{e}_{n_i}\rangle$ verifica $U|\mathbf{v}\rangle = \{(|\mathbf{e}_n\rangle, v)\} = \{\lambda_n\} = |\lambda\rangle \in l_\Omega^2$. Si fuese infinito veamos que también define un único elemento $|\mathbf{v}\rangle \in H$. Efectivamente por ser elemento de l_Ω^2 debe cumplir $\sum_{j \in J} |\lambda_j|^2 < \infty$. Por el lema 1.5.1 tenemos que necesariamente $\sum_{j \in J} \lambda_j |\mathbf{e}_j\rangle \rightarrow v \in H$.

Por último debemos verificar la isometría. Esta se cumple en virtud de la identidad de Parseval

$$(U|\mathbf{v}\rangle, U|\mathbf{w}\rangle)_{l_\Omega^2} \equiv \sum_{n \in J} \overline{(|\mathbf{e}_n\rangle, |\mathbf{v}\rangle)} (|\mathbf{e}_n\rangle, |\mathbf{w}\rangle) = (|\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{w}\rangle)_H \blacksquare$$

En resumen, para cada dimensión Hilbertiana d existe un sólo tipo de espacio de Hilbert separable, salvo isomorfismo. En particular hemos demostrado que $L^2[a, b]$ es isomorfo a l^2_{Ω} .

1.6.1.1 Notemos que a la luz del teorema del isomorfismo anterior, se entiende el criterio de convergencia 1.5.1, puesto que la condición que se enuncia a la derecha no es más que la condición de pertenencia a l^2_{Ω} de una sucesión $(\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in l^2_{\Omega}$.

1.7. Algunas bases ortonormales importantes

A continuación damos sin prueba algunos ejemplos de bases ortonormales de uso frecuente. Para todas ellas la ortonormalidad es relativamente fácil de verificar. El punto delicado es probar el hecho de que su variedad lineal es densa en H .

1.7.0.2 *Base estándar en l^2_{Ω} .* sea $H = l^2_{\Omega}$, admite diversas bases. Una base numerable ortonormal es

$$\{|\mathbf{e}_k\rangle\}_1^{\infty} = \{(1, 0, 0, \dots), (0, 1, 0, \dots), (0, 0, 1, \dots)\} \quad (1.17)$$

Claramente cualquier elemento $|\mathbf{x}\rangle$ de l^2_{Ω} admite una expansión de la forma $|\mathbf{x}\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} a_i |\mathbf{e}_i\rangle$ con $\sum a_i^2 < \infty$.

1.7.0.3 *Base de Legendre*

$H \equiv L^2[-1, +1]$. Los *polinomios de Legendre*

$$|\mathbf{P}_n\rangle \rightarrow P_n(x) \equiv \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (1.18)$$

Los polinomios de Legendre, pueden obtenerse mediante el procedimiento de Gramm-Schmidt aplicado a la sucesión de funciones $\{x^n\}_0^{\infty} \subset L^2[-1, +1]$, el cual es un conjunto linealmente independiente, pero no ortonormal. Finalmente $\left\{\sqrt{n + \frac{1}{2}} P_n\right\}_0^{\infty}$ es base ortonormal para $L^2[-1, +1]$.

1.7.0.4 *Base de Hermite*

$H = L^2(\mathbb{R})$. Ahora no podemos empezar con $x^n \notin H$. Sin embargo podemos considerar otro conjunto de funciones $\{x^n e^{-x^2/2}\}_0^{\infty} \subset H$ que es l.i.. Tras aplicar el método de ortonormalización, el resultado a que se llega es

$$|\phi_n\rangle \rightarrow \phi_n(x) = \frac{1}{(n!2^n \sqrt{\pi})^{1/2}} e^{-x^2/2} H_n(x) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.19)$$

llamadas *funciones de Hermite*, siendo $\{H_n(x)\}_0^{\infty}$ los denominados *polinomios de Hermite*

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}. \quad (1.20)$$

1.7.0.5 *Base de Fourier*

Sea $H_l \subset L^2[0, l]$ el subconjunto formado por funciones periódicas $|\mathbf{f}\rangle \rightarrow f(x) = f(x + l)$.

$$|\mathbf{e}_n\rangle \rightarrow e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} e^{i \frac{2\pi n}{l} x} \quad n \in \mathbf{Z}$$

constituye una base ortonormal. Toda función $|\mathbf{f}\rangle \in H_l$ es desarrollable en serie de Fourier relativa a la base de funciones trigonométricas $|\mathbf{f}\rangle = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_n |\mathbf{e}_n\rangle$, donde las componentes covariantes

$$f_n = (|\mathbf{e}_n\rangle, |\mathbf{f}\rangle) = \frac{1}{\sqrt{l}} \int_0^l e^{-i \frac{2\pi n}{l} x} f(x) dx$$

y $\|\mathbf{f}\|^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |(\mathbf{e}_n, \mathbf{f})|^2$.

1.7.0.6 Base de Laguerre

$H = L^2(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. La sucesión $\{e^{-x/2}x^n\}_0^\infty \in H$ es linealmente independiente, y por Gram-Schmidt conduce a una familia ortonormal y numerable $\{\psi_n(x)\}_1^\infty$, donde salvo un factor ± 1 ,

$$|\psi_n\rangle \rightarrow \psi_n(x) = e^{-x/2} L_n(x), \quad (1.21)$$

siendo L_n los *polinomios de Laguerre*

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n). \quad (1.22)$$

Ejercicio: Probar que

$$(|\mathbf{P}_n\rangle, |\mathbf{P}_m\rangle) = \frac{2}{2n+1} \delta_{m,n}. \quad (1.23)$$

y además calcular $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ y $P_3(x)$.

Capítulo 2

El Espacio Dual

2.1. Formas Lineales

2.1.0.7 Forma lineal

Sea V un espacio lineal. Una forma lineal $\langle \mathbf{u} |$ (también llamada funcional lineal o, simplemente, *bra*), es una aplicación lineal

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u} | : V &\rightarrow \Omega \\ \langle \mathbf{u} | : |\mathbf{v}\rangle &\rightarrow \langle \mathbf{u} | \mathbf{v}\rangle \in \Omega\end{aligned}$$

$$\langle \mathbf{u} | (|\mathbf{v}_1\rangle + a|\mathbf{v}_2\rangle) = \langle \mathbf{u} | \mathbf{v}_1\rangle + a\langle \mathbf{u} | \mathbf{v}_2\rangle. \quad (2.1)$$

La evaluación de un *bra*, $\langle \mathbf{u} |$ sobre un *ket*, $|\mathbf{v}\rangle$, se denomina también *contracción* o *braket*, $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v}\rangle$.

2.1.0.8 Espacio dual: V^*

El conjunto de todas las forma lineales sobre un espacio vectorial V , con la operación natural de suma y multiplicación por un elemento de Ω

$$\langle \mathbf{w} | = \langle \mathbf{w}_1 | + a\langle \mathbf{w}_2 | \Leftrightarrow \langle \mathbf{w} | \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{v}\rangle + a\langle \mathbf{w}_2 | \mathbf{v}\rangle \quad \forall |\mathbf{v}\rangle \in V \quad (2.2)$$

constituye el espacio dual V^* . Impondremos además que el elemento neutro de la suma, $\langle \mathbf{0} |$, sea el único con la propiedad de que

$$\langle \mathbf{0} | \mathbf{v}\rangle = 0 \quad \forall |\mathbf{v}\rangle \in V \quad (2.3)$$

2.1.1. Base y Dimensión

2.1.1.1 En V , un conjunto linealmente independiente y maximal $\{|\mathbf{e}_i\rangle\}$, $i = 1, \dots, n$ constituye una base. Cualquier vector $|\mathbf{v}\rangle \in V$ admite una expansión de la forma

$$|\mathbf{v}\rangle = v^i |\mathbf{e}_i\rangle \quad (2.4)$$

2.1.1.2 También el espacio dual es un espacio lineal, y a él se le aplican las mismas consideraciones que a V . Cuando la dimensión de V es finita la situación se simplifica considerablemente

Teorema 2.1.1 *Sea V un espacio lineal de dimensión finita $\dim(V) = n$. Entonces V y V^* son isomorfos. En particular la dimensión de V^* es igualmente n .*

En este capítulo, mientras no se advierta, trabajaremos con espacios de dimension finita $dim(V) = n$.

La primera consecuencia de este teorema es que V^* admite una base de formas lineales $\{\langle \mathbf{u}^i |, i = 1, 2, \dots, dim(V^*)\}$, tal que para cualquier $\langle \mathbf{w} | \in V^*$ podemos expandir

$$\langle \mathbf{w} | = w_i \langle \mathbf{u}^i | \quad (2.5)$$

El uso de una base para V^* , $\{\langle \mathbf{u}^i |, i = 1, 2, \dots, dim(V^*)\}$, unida a la existencia de una base para V $\{|\mathbf{e}_i\rangle\}$, permite reducir la información necesaria para evaluar cualquier contracción de la forma $\langle \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle$, al conjunto de contracciones elementales $f^i_j = \langle \mathbf{u}^i | \mathbf{e}_j \rangle$

$$\langle \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle = (w_i \langle \mathbf{u}^i |)(v^j |\mathbf{e}_j\rangle) = w_i v^j \langle \mathbf{u}^i | \mathbf{e}_j \rangle = w_i v^j f^i_j \quad (2.6)$$

2.1.1.3 Base Canónica Dual

Dada una base $\{|\mathbf{e}_i\rangle\}$ de V , existe una única *base canónica dual* $\{\langle \mathbf{e}^i |, i = 1, 2, \dots, dim(V)\}$ de V^* , definida por el hecho de que $f^i_j = \delta^i_j$. Es decir

$$\langle \mathbf{e}^i | \mathbf{e}_j \rangle = \delta^i_j \quad i, j = 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

En esta base la contracción de una forma y un vector presentan la forma más simple posible

$$\langle \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle = w_i v^j \delta^i_j = w_i v^i$$

2.1.1.4 Componentes de un vector y de una forma

El uso de la base dual permite recuperar las contravariantes componentes de un vector de una manera simple, mediante la contracción de dicho vector con los elementos de la base dual

$$v^i = \langle \mathbf{e}^i | \mathbf{v} \rangle \quad (2.8)$$

Viceversa, las componentes w_i de una forma $\langle \mathbf{w} |$ no son más que el resultado de evaluar dicha forma sobre los elementos de la base

$$w_i = \langle \mathbf{w} | \mathbf{e}_i \rangle \quad (2.9)$$

2.1.2. Cambios de Base

2.1.2.1 Un espacio vectorial admite infinitas bases. Sean $\{|\mathbf{e}_i\rangle\}$ y $\{|\mathbf{e}'_i\rangle\}$ dos de ellas. Por ser bases, cualquier vector de una de ellas admite una expansión en la otra

$$|\mathbf{e}'_i\rangle = O^j_i |\mathbf{e}_j\rangle \quad (2.10)$$

El conjunto $\{O^j_i\}$ caracteriza completamente el *cambio de base*. Como componentes que son, pueden escribirse también utilizando la base dual

$$O^j_i = \langle \mathbf{e}^j | \mathbf{e}'_i \rangle \quad (2.11)$$

2.1.2.2 Ahora es relevante saber cómo se relacionan los coeficientes de las expansiones de un vector arbitrario en ambas bases:

$$|\mathbf{v}\rangle = v^j |\mathbf{e}_j\rangle = v'^i |\mathbf{e}'_i\rangle = v'^i O^j_i |\mathbf{e}_j\rangle \quad (2.12)$$

donde hemos introducido la acción explícita del operador \mathcal{O} . Por independencia lineal podemos igualar los coeficientes de $|\mathbf{e}_j\rangle$ $j = 1, 2, \dots$

$$v^j = O^j_i v'^i \quad (2.13)$$

Notemos que el conjunto de números O^j_i relaciona la bases y los coeficientes en sentido inverso. Es en este sentido cuando decimos que los coeficientes se transforman de forma *contravariante*.

2.1.2.3 Recordemos que un operador es una aplicación $\mathcal{O} : V \rightarrow V$ que a cada vector $|\mathbf{u}\rangle \in V$ le hace corresponder otro distinto $|\mathbf{v}\rangle \equiv \mathcal{O}(|\mathbf{u}\rangle) \in V$.

En particular, podemos entender el cambio de base como el resultado de la acción de un operador lineal sobre cada elemento de la base $|\mathbf{e}_i\rangle$

$$|\mathcal{O}\mathbf{e}_i\rangle \equiv |\mathbf{e}'_i\rangle = O^j_i |\mathbf{e}_j\rangle \quad (2.14)$$

2.1.2.4 Podemos representar las ecuaciones (2.14) y (2.13) de una manera más compacta mediante el *álgebra de matrices*. Para ello es necesario diseñar matrices con los objetos que entran en las ecuaciones, y *disponerlas de tal manera que la multiplicación matricial reproduzca con fidelidad las instrucciones de sumación que aparecen en ellas*.

Por ejemplo, podemos colocar los coeficientes v^i y v'^j en sendas matrices columna v y v' , así como los números O^j_i en una matriz O donde j etiqueta las filas e i las columnas. Entonces la ecuación (2.13) admite una expresión compacta

$$v = Ov' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O^1_1 & O^1_2 & \cdots & O^1_n \\ O^2_1 & O^2_2 & \cdots & O^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O^n_1 & \cdots & \cdots & O^n_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'^1 \\ v'^2 \\ \vdots \\ v'^n \end{pmatrix}$$

que puede invertirse para expresar las coordenadas finales en términos de las iniciales

$$v' = O^{-1}v$$

En (2.14) el índice j de los vectores $|\mathbf{e}_j\rangle$ se suma con el de las filas, de manera que si \mathbf{e} y \mathbf{e}' denotan sendas matrices columna, con entradas $|\mathbf{e}_j\rangle$ y $|\mathbf{e}'_j\rangle$ respectivamente, entonces dicha ecuación es equivalente al resultado de la operación

$$\mathbf{e}'^t = \mathbf{e}^t O$$

o, equivalentemente

$$\mathbf{e}' = O^t \mathbf{e} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} |\mathbf{e}'_1\rangle \\ |\mathbf{e}'_2\rangle \\ \vdots \\ |\mathbf{e}'_n\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O^1_1 & O^2_1 & \cdots & O^n_1 \\ O^1_2 & O^2_2 & \cdots & O^n_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O^1_n & \cdots & \cdots & O^n_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\mathbf{e}_1\rangle \\ |\mathbf{e}_2\rangle \\ \vdots \\ |\mathbf{e}_n\rangle \end{pmatrix}$$

2.1.2.5 Veamos otro ejemplo. Si construimos sendas matrices A y B con los elementos A^i_j y B^i_j de forma que el primer índice etiquete filas y el segundo columnas, entonces las sumaciones dadas por $\sum_j A^i_j B^j_k$ y $\sum_j A^j_i B^j_k$ se obtienen de las multiplicaciones de matrices AB y $A^t B$ respectivamente.

2.1.2.6 Notación

Vamos a introducir una *notación* de gran utilidad en las transformaciones de cambio de base. Según dicho convenio, la base de partida siempre recibirá índices sin prima: $i, j, \dots, \mu, \nu, \dots$ mientras que para los de la base transformada se reservan índices con prima, $i', j', \dots, \mu', \nu', \dots$. Debe quedar claro que en ambos conjuntos, los subíndices varían dentro del mismo rango de valores $(1, \dots, n)$. Una vez hecha esta precisión no es necesario mantener la prima encima de los objetos referidos a la base transformada. De esta manera $v^{i'}$ significa realmente $v'^{i'}$, y análogamente por $|\mathbf{e}_{i'}\rangle$ debemos

entender realmente $|\mathbf{e}'_{i'}\rangle$. Sólamente cuando demos valores numéricos a estos índices será necesario restituir la tilde en las cantidades que la llevaban de forma implícita. Por ejemplo, cuando $i' = 2$, $|\mathbf{e}_{i'}\rangle \rightarrow |\mathbf{e}'_2\rangle$.

2.1.2.7 Relación de cierre

Con este convenio, la expresión $O^{i_{j'}}$ simboliza *el conjunto de datos que se precisan para expresar la base $\{|\mathbf{e}_i\rangle\}$ en la base $\{|\mathbf{e}_{j'}\rangle\}$* según

$$\boxed{|\mathbf{e}_{j'}\rangle = O^{i_{j'}}|\mathbf{e}_i\rangle.} \quad (2.15)$$

Viceversa, como la especificación de base de partida y base de llegada es convencional, podemos considerar que *el conjunto de datos que nos permiten pasar de $\{|\mathbf{e}_{j'}\rangle\}$ a $\{|\mathbf{e}_i\rangle\}$* se simboliza por $O^{j'_i}$, y se lleva a cabo como sigue

$$|\mathbf{e}_i\rangle = O^{j'_i}|\mathbf{e}_{j'}\rangle$$

Basta ahora componer dos transformaciones de ida y de vuelta

$$|\mathbf{e}_i\rangle = O^{j'_i}|\mathbf{e}_{j'}\rangle = O^{j'_i}O^k_{j'}|\mathbf{e}_k\rangle \quad (2.16)$$

para descubrir que que verifican la *relación de cierre*

$$\boxed{O^k_{j'}O^{j'_i} = \delta^k_i.} \quad (2.17)$$

En lenguaje matricial esto quiere decir que las matrices formadas por los números $O^{i_{j'}}$ y $O^{j'_i}$ son, de hecho, *mútuamente inversas*

$$O^{i'_j} \rightarrow O \quad ; \quad O^{i'_j} \rightarrow O^{-1} \quad (2.18)$$

entonces (2.17) es equivalente a la composición de matrices $OO^{-1} = 1$. Como la distinción entre índices con prima y sin prima es convencional también debe verificarse que la relación de cierre inversa

$$\boxed{O^{i'_j}O^j_{k'} = \delta^{i'_k}.} \quad (2.19)$$

o, matricialmente $O^{-1}O = 1$.

2.1.2.8 En esta notación, la forma en la que aparece $O^{i'_j}$ es natural. Es la única posible que hace consistente la ecuación de transformación, en el sentido de que en ambos miembros de la misma los índices libres sean los mismos. Análogamente, si queremos conectar los coeficientes $v^{i'}$ con los v^j vemos que la única forma gramaticalmente consistente es

$$\boxed{v^{i'} = O^{i'_j}v^j} \quad (2.20)$$

o bien

$$v^j = O^j_{i'}v^{i'} \quad (2.21)$$

que, comparada con (2.13), de nuevo muestra que *las componentes son magnitudes contravariantes*. Esta notación pone de manifiesto el carácter de cada objeto bajo transformaciones lineales de la base, haciéndolo depender de la posición en la que se encuentran los índices.

2.1.2.9 Transformación de la base dual

Efectivamente vamos a comprobar que la colocación de los índices para los elementos de la base dual también codifica su propiedad de transformación. Si a la base $\{|\mathbf{e}_i\rangle\}$ le corresponde la base

dual $\{\langle \mathbf{e}^j | \}$, a la base transformada $\{|\mathbf{e}_{j'}\rangle\}$ le debe corresponder una base canónica dual $\{\langle \mathbf{e}^{i'} | \}$ que satisfice

$$\langle \mathbf{e}^{i'} | \mathbf{e}_{j'} \rangle = \delta^{i' j'}$$

Transformando según la ecuación (2.15), encontramos

$$\langle \mathbf{e}^{i'} | O^{i' j'} | \mathbf{e}_i \rangle = \delta^{i' j'} \quad (2.22)$$

a la vista de (2.19) tenemos que la solución debe ser necesariamente de la forma

$$\boxed{\langle \mathbf{e}^{i'} | = O^{i' k} \langle \mathbf{e}^k |}, \quad (2.23)$$

puesto que entonces obtenemos

$$O^{i' k} O^{i j'} \langle \mathbf{e}^k | \mathbf{e}_i \rangle = O^{i' k} O^{i j'} \delta^k_i = O^{i' k} O^k_{j'} = \delta^{i' j'}. \quad (2.24)$$

De nuevo, podíamos haber acertado la deducción sin más que observar que la regla de transformación encontrada (2.23), es la única consistente con la posición de los índices.

Como vemos, esta regla es la misma que la de las componentes v^i , lo cual demuestra que las formas lineales se transforman de manera *contravariante* con respecto a los vectores.

2.1.2.10 Nos queda por examinar cómo se transforman las componentes v_i de una forma. De nuevo el argumento que se debe utilizar es el de la descripción invariante de una forma arbitraria frente a cambios de base $\langle \mathbf{w} | = w_i \langle \mathbf{e}^i | = w_{i'} \langle \mathbf{e}^{i'} |$. Sin embargo la solución ya debe ser evidente después de los casos que hemos resuelto anteriormente: si queremos pasar de los números w_i a los $w_{j'}$ utilizando el conjunto de datos $O^{i' j}$ o bien $O^j_{i'}$, las únicas opciones consistentes son

$$w_{i'} = O^j_{i'} w_j, \quad w_i = O^{j'}_i w_{j'} \quad (2.25)$$

que por supuesto son compatibles. De modo que, tal y como revela la posición de los subíndices, los coeficientes de las formas se transforman *igual* que los vectores de la base. Como hemos tomado éstos como punto de partida en el cambio de base, se dice que w_i es un conjunto de cantidades que se transforman de manera *covariante*.

2.1.2.11 Resumen:

un conjunto de números, $O^{i' j'}$, definen un cambio de base con respecto al cual los cuatro tipos de magnitudes que hemos estudiado se agrupan esencialmente en dos:

Covariantes: (o con el índice abajo) se transforman como $_{i'} = O^i_{i'}$. Por ejemplo los *vectores de la base* $|\mathbf{e}_j\rangle$ o las *componentes de una forma* w_j .

Contravariantes: (o con el índice arriba) se transforman como $^{i'} = O^{i'}_i$. Por ejemplo las *componentes de vectores* v^i o los *vectores de la base dual* $\langle \mathbf{e}^i |$.

2.1.2.12 Notación matricial

La gran claridad y simetría de esta notación se obtiene a expensas de tener que trabajar con índices. Nótese que en ningún momento hemos hablado de matrices sino de conjuntos de números, y las operaciones que hay que hacer con ellos están especificadas sin ambigüedad. Otras formulaciones del problema procuran obviar los índices haciendo conexión con el álgebra de matrices. Entonces surgen multitud de dudas acerca de si cierta regla de transformación involucra sólo la inversa de la matriz de transformación, o la inversa traspuesta, etc. etc. Todas estas reglas se pueden recuperar de las expresiones 2.14 y 2.13 si se adoptan las siguientes

precauciones: 1: definir claramente qué índices etiquetan filas y cuáles columnas en las matrices formadas con cada objeto; 2: identificar si los índices que se suman coinciden con los que se deducen de la ecuación matricial que se pretende asociar. De lo contrario la operación debe corregirse con una oportuna trasposición.

2.1.2.13 Transformaciones Activas y Pasivas

Un cambio de base es sinónimo de una *transformación pasiva*. Es decir, el vector $|\mathbf{v}\rangle$ no cambia. Lo que varía es su descripción. Todo el efecto aparente que se produce sobre las componentes es debido a la modificación de la base $|\mathbf{e}_i\rangle \rightarrow |\mathbf{e}_{i'}\rangle$ contenida en la matriz $O^i_{i'}$. Las componentes contravariantes se transforman con la matriz inversa $O^{i'}_i$ porque, debido a la invariancia del vector, deben “compensar” el cambio producido en la base.

Por el contrario, una *transformación activa* implica un cambio efectivo del vector en cuestión, quedando intacta la base. En este caso la regla $|\mathbf{v}\rangle \rightarrow |\mathbf{v}'\rangle = O|\mathbf{v}\rangle$ debe entenderse como que el vector $|\mathbf{v}\rangle$ de componentes v^i pasa a otro $|\mathbf{v}'\rangle$ de componentes $v'^{i'}$ en la misma base.

La relación entre ambos puntos de vista consiste en que, si las nuevas componentes $v'^{i'}$ se relacionan con las antiguas v^i mediante la misma matriz $O^i_{i'}$ que en el caso pasivo, entonces la acción que representa O es la inversa. Para entenderlo claramente pensemos que O es una rotación de ángulo θ en el plano dada por

$$O^{i'}_j = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

El cambio que se produce en las componentes de un vector bidimensional $v'^{i'} = O^i_{i'} v^i$ admite cualquiera de las dos interpretaciones siguientes: a) el vector ha sido rotado un ángulo θ (transformación activa), b) el vector es el mismo, expresado en un sistema de ejes nuevo, girado un ángulo $-\theta$ con respecto al antiguo.

Es decir, $O^i_{i'}$ son las componentes de O actuando sobre $|\mathbf{v}\rangle$ en el punto de vista activo, y las de O^{-1} actuando sobre la base $\{|\mathbf{e}_i\rangle\}$ en el punto de vista pasivo.

2.2. Dualidad en espacios de Hilbert

2.2.1. La aplicación adjunta, $\dagger : V \Rightarrow V^*$

2.2.1.1 A cada ket le corresponde un bra

Sea $(V, (,))$ un espacio de Hilbert. El producto escalar es una aplicación $(,) : V \times V \rightarrow \Omega$. En este caso disponemos de una manera de elegir, para cada ket $|\mathbf{w}\rangle \in V$, un bra $\langle \mathbf{w}| \in V^*$. Denominamos a esta asociación, *aplicación adjunta*

$$\begin{aligned} \dagger : V &\rightarrow V^* \\ |\mathbf{v}\rangle &\rightarrow |\mathbf{v}\rangle^\dagger \equiv \langle \mathbf{v}| \end{aligned} \quad (2.27)$$

Definición 2.2.1 para cada $|\mathbf{w}\rangle \in V$ el adjunto $|\mathbf{w}\rangle^\dagger \equiv \langle \mathbf{w}| \in V^*$ es el único elemento que, para todo $\forall |\mathbf{v}\rangle \in V$, verifique la igualdad

$$\langle \mathbf{w}|\mathbf{v}\rangle = (|\mathbf{w}\rangle, |\mathbf{v}\rangle) \quad (2.28)$$

Para demostrar que esta aplicación está bien definida debemos comprobar la unicidad. De lo contrario, es decir si $\langle \mathbf{u}| = |\mathbf{u}\rangle^\dagger = \langle \mathbf{u}'|$ con $\langle \mathbf{u}| \neq \langle \mathbf{u}'|$, entonces tendríamos $\langle \mathbf{u} - \mathbf{u}'|\mathbf{v}\rangle = (|\mathbf{0}\rangle, |\mathbf{v}\rangle) = 0$, $\forall |\mathbf{v}\rangle \in V$. Lo cual implica, según (2.3), que $\langle \mathbf{u}| - \langle \mathbf{u}'| = \langle \mathbf{0}|$, es decir $\langle \mathbf{u}| = \langle \mathbf{u}'|$.

La ecuación (2.28) impone una forma precisa de extender la acción de la aplicación adjunta al cuerpo Ω . En efecto, si $|\mathbf{u}\rangle = |\mathbf{v}\rangle + \lambda|\mathbf{w}\rangle$, se sigue que $\langle\mathbf{u}| = \langle\mathbf{v}| + \lambda^*\langle\mathbf{w}|$:

$$\langle\mathbf{u}|\mathbf{x}\rangle = (\langle\mathbf{u}|, |\mathbf{x}\rangle) = (\langle\mathbf{v}| + \lambda\langle\mathbf{w}|, |\mathbf{x}\rangle) = (\langle\mathbf{v}|, |\mathbf{x}\rangle) + \lambda^*(\langle\mathbf{w}|, |\mathbf{x}\rangle) = (\langle\mathbf{v}| + \lambda^*\langle\mathbf{w}|)|\mathbf{x}\rangle \quad (2.29)$$

Dicho de otra manera, podemos extender la acción de \dagger a Ω como la conjugación compleja $\dagger : \lambda \rightarrow \lambda^*$.

2.2.1.2 Bases adjunta y dual

Denotemos con g_{ij} el conjunto de los productos escalares elementales entre los elementos de la base $|\mathbf{e}_i\rangle$

$$g_{ij} \equiv (\langle\mathbf{e}_i|, |\mathbf{e}_j\rangle) = (\langle\mathbf{e}_j|, |\mathbf{e}_i\rangle)^* = g_{ji}^* \quad (2.30)$$

Asociadas a la misma base $\{|\mathbf{e}_i\rangle\}$ de V tenemos dos bases para V^*

$$|\mathbf{e}_i\rangle \Rightarrow \begin{cases} \text{base adjunta} & \langle\mathbf{e}_i| = |\mathbf{e}_i\rangle^\dagger & \langle\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j\rangle = (\langle\mathbf{e}_i|, |\mathbf{e}_j\rangle) \equiv g_{ij} \\ \text{base canónica dual} & \langle\mathbf{e}^i| & \langle\mathbf{e}^i|\mathbf{e}_j\rangle = \delta^i_j \end{cases} \quad (2.31)$$

Ambas deben estar relacionadas linealmente, de forma que las dos expresiones anteriores sean compatible. Es inmediato comprobar que la siguiente ecuación satisface este requisito:

$$\boxed{\langle\mathbf{e}_i| = g_{ij}\langle\mathbf{e}^j|} \quad (2.32)$$

Supongamos que expandimos un cierto *ket* $|\mathbf{w}\rangle$ en una base, $|\mathbf{w}\rangle = w^i|\mathbf{e}_i\rangle$. El *bra* asociado, $\langle\mathbf{w}| = |\mathbf{w}\rangle^\dagger$ admite dos expansiones, según utilicemos la base adjunta $\langle\mathbf{e}_i|$ o la canónica dual $\langle\mathbf{e}^i|$:

$$\langle\mathbf{w}| = (w^i|\mathbf{e}_i\rangle)^\dagger = \langle\mathbf{e}_i|w^{i*} \quad (2.33)$$

$$\langle\mathbf{w}| = \langle\mathbf{e}^j|w_j \quad (2.34)$$

introduciendo (2.32) en (2.33) y comparando con (2.34) podemos relacionar las componentes de ambas expansiones

$$\boxed{w_j = w^{i*}g_{ij}.} \quad (2.35)$$

Esta forma de relacionar las componentes contravariantes de un vector y las covariantes de la forma asociada se denomina *bajar el índice*.

2.2.1.3 Base ortonormal

Si $\{|\mathbf{e}_i\rangle\}$ es una base ortonormal tenemos que

$$\langle\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j\rangle = (\langle\mathbf{e}_i|, |\mathbf{e}_j\rangle) = \delta_{ij} \quad (2.36)$$

En este caso, la correspondencia es sencillamente una conjugación compleja

$$\boxed{w_i = w^{j*}\delta_{ji} = w^{i*}} \quad (2.37)$$

2.2.1.4 Notación

Si c es un número complejo, a veces se usa la notación $c|\mathbf{v}\rangle$ para denotar $c|\mathbf{v}\rangle$. La aplicación adjunta es *anti-lineal*. Es decir

$$\langle c\mathbf{v}| = |c\mathbf{v}\rangle^\dagger = (c|\mathbf{v}\rangle)^\dagger = c^*\langle\mathbf{v}|$$

2.2.1.5 Ejemplo: Estado Cuántico

En el contexto de la mecánica cuántica, el estado de un sistema viene caracterizado por un vector de un cierto espacio de Hilbert complejo $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$. En general será conveniente utilizar una base $|\mathbf{e}_i\rangle$ una base de autoestados de un cierto operador hermítico O (observable). Escribiendo $|\psi\rangle = \sum c^i |\mathbf{e}_i\rangle$ los coeficientes c^i admiten la interpretación de una densidad de probabilidad de obtener como resultado de una medida el autovalor λ_i asociado al autovector $|\mathbf{e}_i\rangle$. Por ser O hermítico, la base puede escogerse ortonormal, de modo que podemos asignar a $|\psi\rangle$ un *bra* $\langle\psi|$ es $\langle\psi| = c_j \langle\mathbf{e}^j|$ con $c_j = c^{j*}$. Entonces diremos que $|\psi\rangle$ está normalizado si $\langle\psi|\psi\rangle = c_i c^i = \sum_i |c^i|^2 = 1$, es decir si la suma de las probabilidades es la unidad.

2.2.2. $V^* \Rightarrow V$

2.2.2.1 Producto escalar no-degenerado

A las propiedades del producto escalar le podemos añadir la siguiente

PE5. (no-degeneración) If $(|\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{x}\rangle) = 0 \ \forall |\mathbf{x}\rangle \Rightarrow |\mathbf{v}\rangle = 0$.

Cuando V tiene dimension finita, podemos demostrar que la condición de no-degeneración es equivalente a la invertibilidad de g_{ij} . En efecto, en componentes $|\mathbf{u}\rangle = u^i |\mathbf{e}_i\rangle$, $|\mathbf{x}\rangle = x^j |\mathbf{e}_j\rangle$ tenemos que

$$(|\mathbf{u}\rangle, |\mathbf{x}\rangle) = u^{i*} g_{ij} x^j = 0 \xrightarrow{\forall u^i} g_{ij} x^j = 0 \tag{2.38}$$

Este sistema homogéneo sólo debe tener por solución $x^j = 0$, y eso requiere que

$$\boxed{(\ ,) \text{ no degenerado} \Leftrightarrow \det g_{ij} \neq 0} \tag{2.39}$$

Cuando el producto escalar es no-degenerado podemos invertir la matriz g_{ij} en cualquier base. Denotamos su inversa mediante

$$g^{ij} \equiv g_{ij}^{-1} = g^{ji*} \tag{2.40}$$

Otra manera de decir lo mismo es afirmar que

$$g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j = g_{jk} g^{ki} \tag{2.41}$$

2.2.2.2 Subir índices

Si el producto escalar es no-degenerado podemos invertir la ecuación (2.35) multiplicando en ambos lados por g^{jk} y usando (2.41)

$$w^{k*} = w_j g^{jk} = g^{kj*} w_j$$

es decir

$$\boxed{w^i = g^{ij} w_j^*} \tag{2.42}$$

Hagamos una verificación de consistencia

$$\begin{aligned} \langle\mathbf{w}|\mathbf{v}\rangle &= w_j v^j \\ &= w^{i*} g_{ij} g^{jk} v_k^* = w^{i*} v_i^* \\ &= (v_i w^i)^* = \langle\mathbf{v}|\mathbf{w}\rangle^* \\ &= \langle\mathbf{v}|\mathbf{w}\rangle^* \end{aligned} \tag{2.43}$$

En resumen, en un espacio con producto escalar no-degenerado de dimensión finita siempre podemos invertir la operación y asociar a cualquier forma $\langle\mathbf{w}|$ un *ket* $|\mathbf{w}\rangle$. Las componentes se relacionan por (2.35) ó, equivalentemente (2.42). Es decir, la aplicación adjunta es biyectiva.

2.2.3. Dimensión infinita: Distribuciones

En principio, si V es un espacio de Hilbert separable, admite una base ortonormal numerable, y todos los resultados anteriores pueden extenderse a este caso sin más que dejar que los subíndices i, j, i', j', \dots etc. recorran los números naturales \mathbb{N} .

Sin embargo, en este caso deja de ser cierto que V y V^* sean automáticamente isomorfos aunque el espacio de hilbert sea no-degenerado en el sentido de la sección anterior. Brevemente, no todos los elementos de $\langle \mathbf{w} | \in V^*$ son de la forma $(|\mathbf{w}\rangle, \cdot)$ para algún $|\mathbf{w}\rangle \in V$. Basta con encontrar algún contraejemplo. Trabajaremos con el espacio de Hilbert separable $L^2(\mathbb{R})$ de funciones de cuadrado sumable sobre la recta real. A cada función $f(x)$ tal que $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty$ le corresponde un vector $|\mathbf{f}\rangle \in L^2(\mathbb{R})$.

2.2.3.1 Delta de Dirac

Podemos tomar una sucesión de vectores $|\mathbf{u}_{x_0}^n\rangle \rightarrow u_{x_0}^n(x)$, con $n \in \mathbb{N}$, dada por la siguiente expresión

$$u_{x_0}^n(x) = \begin{cases} 0 & |x - x_0| \geq \frac{1}{2n} \\ n & |x - x_0| < \frac{1}{2n} \end{cases} \quad (2.44)$$

A cada elemento de esta sucesión le podemos asignar un *bra* $\langle \mathbf{u}_{x_0}^n | \in L^{2*}(\mathbb{R})$ mediante el requisito de que, $\forall |\mathbf{g}\rangle \in L^2(\mathbb{R})$ se cumpla

$$\langle \mathbf{u}_{x_0}^n | \mathbf{g}\rangle = (|\mathbf{u}_{x_0}^n\rangle, |\mathbf{g}\rangle) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{x_0}^n(x) g(x) dx \quad (2.45)$$

Ahora, por un lado tenemos que la norma $\|\mathbf{u}_{x_0}^n\| = \sqrt{n}$ diverge cuando $n \rightarrow \infty$. Por tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathbf{u}_{x_0}^n\rangle \notin L^2(\mathbb{R}) \quad (2.46)$$

Sin embargo, en este límite la integral (2.45) alcanza un valor bien definido

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathbf{u}_{x_0}^n | \mathbf{g}\rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_{x_0}^n(x) g(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} u_{x_0}^n(x) dx = g(x_0) \quad (2.47)$$

para cualquier vector $|\mathbf{g}\rangle \in L^2(\mathbb{R})$. En consecuencia, la sucesión $\langle \mathbf{u}_{x_0}^n |$ sí alcanza una *forma límite* dentro de $L^{2*}(\mathbb{R})$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathbf{u}_{x_0}^n | = \langle \mathbf{x}_0 | \in L^{2*}(\mathbb{R}) \quad (2.48)$$

definida por su acción sobre cualquier vector $\forall |\mathbf{g}\rangle \in L^2(\mathbb{R})$

$$\langle x_0 | \mathbf{g}\rangle = g(x_0) \quad (2.49)$$

La notación habitual asocia $\langle x_0 | \rightarrow \delta(x - x_0)$ de la misma manera que $|\mathbf{g}\rangle \rightarrow g(x)$.

2.2.3.2 Ondas Planas

Consideremos igualmente una sucesión de funciones con la forma de una onda plana truncada sobre un intervalo de longitud $L \in \mathbb{N}$.

$$|\mathbf{v}_{p_0}^L\rangle \rightarrow v_{p_0}^L(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geq \frac{L}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ip_0 x} & |x| < \frac{L}{2} \end{cases} \quad (2.50)$$

Nuevamente, cuando $L \rightarrow \infty$, $\|\mathbf{v}_{p_0}^L\| = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \rightarrow \infty$ y el límite no es un elemento de $L^2(\mathbb{R})$. Sin embargo, si a cada elemento le asociamos un dual

$$\langle \mathbf{v}_{p_0}^L | \mathbf{g}\rangle \equiv (|\mathbf{v}_{p_0}^L\rangle, |\mathbf{g}\rangle) = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ip_0 x} g(x) \quad (2.51)$$

cuando $L \rightarrow \infty$, la cantidad $\langle \mathbf{v}_p^L | \mathbf{g} \rangle$ alcanza un límite

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \langle \mathbf{v}_{p_0}^L | \mathbf{g} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ip_0x} g(x) = \bar{g}(p_0) \quad (2.52)$$

que es el valor de la transformada de Fourier $\bar{g}(p_0)$. En consecuencia, podemos definir una *forma límite* $\lim_{L \rightarrow \infty} \langle \mathbf{v}_{p_0}^L | \equiv \langle p_0 | \in L^{2*}(\mathbb{R})$ por su acción sobre todos los elementos $|\mathbf{g}\rangle \in L^2(\mathbb{R})$ definida por

$$\langle p_0 | \mathbf{g} \rangle = \bar{g}(p_0) \quad (2.53)$$

2.2.3.3 Distribuciones

L^{2*} no es por tanto isomorfo a L^2 , sino que es más grande. Se denominan a los elementos de L^{2*} *distribuciones*.

2.2.4. Bases Continuas

La discusión de la sección previa implica que hay funciones que no son de cuadrado sumable (por tanto no llevan asociadas ningún elemento de L^2), y sin embargo mantienen un producto escalar finito sensato con cualquier vector de este espacio (por tanto se les puede asociar un elemento de L^{2*}). A efectos prácticos, cualquiera de los dos conjuntos de formas $\{|x_0\rangle\}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ o bien $\langle p_0|$, $p_0 \in \mathbb{R}$ permite reconstruir completamente la función $f(x)$ asociada a un vector $|\mathbf{f}\rangle \in L^2(\mathbb{R})$ cualquiera

$$\begin{aligned} f(x) &= \langle x | \mathbf{f} \rangle \\ \bar{f}(p) &= \langle p | \mathbf{f} \rangle \end{aligned} \quad (2.54)$$

Por tanto, podemos definir una *base generalizada*, formada por un conjunto continuo de vectores $|x\rangle \rightarrow |x\rangle$ y $\langle p| \rightarrow |p\rangle$ con los que escribir

$$|\mathbf{f}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle x | \mathbf{f} \rangle |x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) |x\rangle \quad (2.55)$$

o bien

$$|\mathbf{f}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp \langle p | \mathbf{f} \rangle |p\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp \bar{f}(p) |p\rangle. \quad (2.56)$$

Estrictamente hablando estas expresiones no tienen sentido puesto que ni $|x\rangle$ ni $|p\rangle$ tienen norma finita. Por ejemplo, en un contexto de Mecánica Cuántica, ninguna de las dos admite la interpretación de una función de onda. Se trata por tanto de un par de *bases continuas* y sólo sirven al efecto de escribir una expansión formal como (2.55) o (2.56). Sin embargo su utilidad proviene de que con unas modificaciones evidentes, muchas expresiones mencionadas en el presente capítulo admiten una generalización directa.

2.2.4.1 Base canónica dual

La forma de compatibilizar (2.54) con (2.55) es generalizar la relación de dualidad canónica entre las bases $\{|x\rangle\}$ y $\{|x\rangle\}$ en la forma siguiente

$$\langle x' | x \rangle = \delta(x' - x). \quad (2.57)$$

Análogamente

$$\langle p' | p \rangle = \delta(p' - p) \quad (2.58)$$

Vemos que, al tratar con bases continuas debemos sustituir la delta de Kronecker δ^i_j por la delta de Dirac $\delta(x - x')$.

2.2.4.2 Cambio de Base

El análogo de (2.11) es ahora

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ipx} \quad ; \quad \langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ipx} \quad (2.59)$$

que, insertado en (2.10) debe leerse (formalmente) como

$$|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} |p\rangle dp \quad (2.60)$$

$$|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} |x\rangle dx \quad (2.61)$$

La compatibilidad entre (2.57) (2.58) y (2.59) es equivalente a las transformada de Fourier de la delta de Dirac

$$\begin{aligned} \delta(x' - x) &= \langle x'|x\rangle \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} dp' \langle x'|p'\rangle \langle p'| \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dp' \langle p'|x\rangle |p'\rangle \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp' dp \frac{e^{ip'x'}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\pi}} \delta(p' - p) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{ip(x' - x)} \end{aligned} \quad (2.62)$$

Análogamente,

$$\delta(p' - p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} e^{ix(p' - p)} \quad (2.63)$$

2.2.4.3 Otras definiciones de $\delta(x)$

Las siguientes sucesiones definen $\delta(x - x_0)$ en el límite $\epsilon \rightarrow 0$

$$\frac{1}{2\epsilon} e^{-\frac{|x-x_0|}{\epsilon}} \quad (2.64)$$

$$\frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{(x - x_0)^2 + \epsilon^2} \quad (2.65)$$

$$\frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\epsilon}} \quad (2.66)$$

$$\frac{1}{\pi} \frac{\text{sen}(x - x_0/\epsilon)}{x} \quad (2.67)$$

$$\frac{\epsilon}{\pi} \frac{\text{sen}^2\left(\frac{x-x_0}{\epsilon}\right)}{(x - x_0)^2} \quad (2.68)$$

2.2.4.4 Propiedades de $\delta(x)$

Las siguientes propiedades se demuestran por su validez sobre cualquier función de prueba.

(i)

$$\delta(g(x)) = \sum_j \frac{1}{|g'(x_j)|} \delta(x - x_j)$$

donde la suma se realiza sobre todas las raíces de la ecuación $g(x_j) = 0$. Si esta ecuación admite ceros múltiples (tales que $g'(x_j) = 0$), entonces $\delta(g(x))$ no tiene sentido. Esta propiedad implica, en particular

- $\delta(-x) = \delta(x)$
- $\delta(cx) = \frac{1}{|c|}\delta(x)$

(ii)

$$g(x)\delta(x - x_0) = g(x_0)\delta(x - x_0)$$

Y de manera más general $x\delta(x) = 0$.

2.2.4.5 Derivadas y primitivas de $\delta(x)$

La función *escalón* $\theta(x - x_0)$ definida por

$$\theta(x - x_0) = 1 \quad \text{si } x > 0 \tag{2.69}$$

$$\theta(x - x_0) = 0 \quad \text{si } x < 0 \tag{2.70}$$

$$\tag{2.71}$$

tampoco pertenece a $L^2(\mathbf{R})$. Verifica

$$\theta(x - x_0) = \int_{-\infty}^x \delta(x - x_0) dx \tag{2.72}$$

o, equivalentemente

$$\delta(x - x_0) = \theta'(x - x_0) \tag{2.73}$$

lo cual ha de interpretarse como un límite.

Capítulo 3

Tensores

3.1. Producto Tensorial de Espacios Vectoriales

3.1.0.6 Definición de producto tensorial

Dados dos espacios vectoriales $V^{(1)}$ y $V^{(2)}$, definimos el espacio vectorial producto directo $V = V^{(1)} \otimes V^{(2)}$ como el conjunto de pares ordenados $|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{v}_1\rangle \otimes |\mathbf{v}_2\rangle$ donde $|\mathbf{v}_1\rangle \in V^{(1)}$ y $|\mathbf{v}_2\rangle \in V^{(2)}$ y todas sus combinaciones lineales de la forma $\lambda(|\mathbf{v}_1\rangle \otimes |\mathbf{v}_2\rangle) + \mu(|\mathbf{w}_1\rangle \otimes |\mathbf{w}_2\rangle) + \dots$

El producto tensorial es lineal en cada argumento. Esto quiere decir que $(\lambda|\mathbf{v}_1\rangle + \mu|\mathbf{w}_1\rangle) \otimes |\mathbf{v}_2\rangle \equiv \lambda(|\mathbf{v}_1\rangle \otimes |\mathbf{v}_2\rangle) + \mu(|\mathbf{w}_1\rangle \otimes |\mathbf{v}_2\rangle)$, con una identidad semejante para el segundo argumento.

3.1.0.7 Base de un Espacio Producto

Si $\{|\mathbf{e}_i^{(1)}\rangle\}, i = 1, \dots, d_1$ es base de $V^{(1)}$ y $\{|\mathbf{e}_\alpha^{(2)}\rangle\}, \alpha = 1, \dots, d_2$ es base de $V^{(2)}$, una base para $V = V^{(1)} \otimes V^{(2)}$ está formada por todos los pares $\{|\mathbf{e}_{i\alpha}\rangle = |\mathbf{e}_i^{(1)}\rangle \otimes |\mathbf{e}_\alpha^{(2)}\rangle\}$. Por tanto, la dimensión de V es $d = d_1 d_2$.¹

Un vector $|\mathbf{u}\rangle \in V^{(1)} \otimes V^{(2)}$ admite una descomposición única

$$|\mathbf{u}\rangle = u^{i\alpha} |\mathbf{e}_{i\alpha}\rangle = u^{i\alpha} |\mathbf{e}_i^{(1)}\rangle \otimes |\mathbf{e}_\alpha^{(2)}\rangle \quad (3.1)$$

En general no será posible encontrar vectores $|\mathbf{v}_1\rangle$ y $|\mathbf{v}_2\rangle$ tales que $|\mathbf{u}\rangle = |\mathbf{v}_1\rangle \otimes |\mathbf{v}_2\rangle$.

3.1.0.8 Ejemplo: Función de Onda de Espín

En general el producto tensorial aparece cuando tenemos que representar más de una propiedad de un sistema. Por ejemplo, la función de onda de un electrón describe la densidad de probabilidad de encontrar dicho electrón en una posición \vec{x} , con una determinada componente del espín igual a $1/2$ ó $-1/2$. Por ello la representamos mediante $\psi^i(\vec{x})$. Éstas son las componentes de un vector $|\Psi\rangle \in \mathbb{C}^2 \otimes L^2(\mathbb{R}^3)$

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1,2} \int d^3x \psi^i(\vec{x}) |\mathbf{s}_i\rangle \otimes |\vec{x}\rangle \quad (3.2)$$

3.1.0.9 Ejemplo: Estados Entrelazados

¹Nótese la diferencia con el caso del producto cartesiano $V^{(1)} \times V^{(2)}$. En el producto cartesiano, la suma de elementos se induce a partir de las sumas en cada espacio por separado. Es decir si $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$, entonces $\mathbf{v} + \mathbf{u} = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_1) \times (\mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_2)$. Es evidente que la dimensión de $V^{(1)} \times V^{(2)}$ es $d = d_1 + d_2$.

En mecánica cuántica es frecuente encontrarse con problemas de varios grados de libertad. Por ejemplo la función de onda de un sistema de dos partículas de espín 1/2 es un elemento de $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes L^2(\mathbb{R}^3) \otimes L^2(\mathbb{R}^3)$. Si obviamos la parte orbital, los grados de libertad de espín viven en un espacio de dimensión compleja $2 \times 2 = 4$. Si adoptamos una base $|\mathbf{s}_i\rangle_{1,2}$ de autoestados de la componente tercera del espín, S_z el estado de espín más general en que puede encontrarse el sistema viene dado por la combinación

$$|\Psi\rangle_{12} = \sum_{i,j=1,2} s^{ij} |\mathbf{s}_i\rangle_1 \otimes |\mathbf{s}_j\rangle_2 \quad (3.3)$$

donde, para que esté normalizado, los coeficientes s^{ij} han de ser amplitudes de probabilidad que suman $\sum_{i,j=1,2} |s^{ij}|^2 = 1$

En general, no será posible escribir $|\Psi\rangle_{12} = |\phi\rangle_1 \otimes |\varphi\rangle_2$. La posibilidad de hacerlo o no, dependerá en gran medida de los valores de las componentes s^{ij} . Cuando es posible hablamos de un *estado separable*, y cuando no, de un *estado entrelazado*. De forma general, un estado inicialmente separable, $|\phi\rangle_1 \otimes |\varphi\rangle_2$ evolucionará a un estado separable si los subsistemas 1 y 2 son libres, y evolucionará a un estado entrelazado de la forma (3.3) si existe interacción entre los subsistemas 1 y 2.

En un estado *separable*, la medida de un observador sobre un subsistema no afecta a la función de onda del otro subsistema. Por ejemplo, usando la notación $|\mathbf{s}_1\rangle = |\uparrow\rangle$ y $|\mathbf{s}_2\rangle = |\downarrow\rangle$ para la tercera componente del espín si después de medir sobre estado $|\phi\rangle_1$ encontramos $|\uparrow\rangle_1$ habremos efectuado la operación (no unitaria)

$$|\phi\rangle_1 \otimes |\varphi\rangle_2 \xrightarrow{S_z} |\uparrow\rangle_1 \otimes |\varphi\rangle_2. \quad (3.4)$$

Por el contrario, en un estado *entrelazado* el resultado de medir sobre 1 también afecta al estado que describe el sistema 2. Por ejemplo podríamos tener

$$|\uparrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2 \xrightarrow{S_z} |\uparrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2. \quad (3.5)$$

Este tipo de correlaciones pueden parecer inocentes. Sin embargo no lo son tanto si se piensa que los dos subsistemas 1 y 2 que comparten un estado entrelazado pueden residir a miles de kilómetros de distancia. Este tipo de correlaciones se estudian hoy en día en el contexto de la Teoría Cuántica de la Información.

3.2. Tensores

En lo que sigue estaremos interesados sólo en casos particulares en los que $V_1, V_2 = V$ ó V^* . En estos casos la dimensión del espacio producto es d^2 . Por ejemplo, para el caso $V \otimes V$ encontramos una base en la forma $\{|\mathbf{e}_{ij}\rangle = |\mathbf{e}_i\rangle \otimes |\mathbf{e}_j\rangle\}$, mientras que si hablamos de $V \otimes V^*$ tenemos otra del tipo $\{|\mathbf{e}_i^j\rangle = |\mathbf{e}_i\rangle \otimes \langle \mathbf{e}^j|\}$.

Un vector arbitrario del espacio $V \otimes V$ admite una expansión en la base anterior

$$|\mathbf{v}\rangle = v^{ij} |\mathbf{e}_{ij}\rangle = v^{ij} |\mathbf{e}_i\rangle \otimes |\mathbf{e}_j\rangle.$$

Igualmente, un elemento arbitrario del espacio $V \otimes V^*$ puede desarrollarse en la forma

$$|\mathbf{w}\rangle = w^i_j |\mathbf{e}_i^j\rangle = w^i_j |\mathbf{e}_i\rangle \otimes \langle \mathbf{e}^j|.$$

3.2.0.10 Cambio de base

Un cambio de base en V implica un cambio de base sobre $V \otimes V$ de la forma

$$|\mathbf{e}_{i'j'}\rangle = O^{i'}_i O^j_{j'} |\mathbf{e}_{ij}\rangle \quad (3.6)$$

Naturalmente, sabemos que también se produce un cambio de base en V^* , y por tanto podemos calcular el cambio de base que se produce en $V \otimes V^*$.

$$|\mathbf{e}_{i'}^{j'}\rangle = O^i_{i'} O^{j'}_j |\mathbf{e}_i^j\rangle$$

Inmediatamente, sin más que invocar *invariancia* de los objetos geométricos \mathbf{v} y \mathbf{w} frente a cambios de base, se deduce que la componentes siguen la ley de transformación (covariante o contravariante) que indica la posición de sus índices:

$$v^{i'j'} = O^i_{i'} O^{j'}_j v^{ij} \quad (3.7)$$

$$v^{i'j'} = O^i_{i'} O^{j'}_j v^{ij} \quad (3.8)$$

3.2.0.11 Tensores de rango arbitrario.

Claramente podemos generalizar la definición que hemos dado del producto tensorial de dos espacios vectoriales a N de ellos. Así a partir de $V^{(1)}, V^{(2)}, \dots, V^{(N)}$ podemos formar el *espacio producto* $V^{(1)} \otimes V^{(2)} \otimes \dots \otimes V^{(N)}$, el cual está formado por N -tuplas ordenadas de vectores $|\mathbf{v}^{(1)}\rangle \otimes \dots \otimes |\mathbf{v}^{(N)}\rangle$.

En particular estamos interesados en el caso en el que p de estos espacios son iguales a V , y q de ellos son iguales a V^* : Así, por ejemplo, podemos escoger la opción de que los p primeros sean V y los q V^* vengan después.

$$\overbrace{V \otimes \dots \otimes V}^p \otimes \overbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}^q. \quad (3.9)$$

Un elemento arbitrario de este espacio adopta la forma genérica

$$\mathbf{T} = T^{i_1, \dots, i_p}_{j_1, \dots, j_q} |\mathbf{e}_{i_1}\rangle \otimes \dots \otimes |\mathbf{e}_{i_p}\rangle \otimes \langle \mathbf{e}^{j_1}| \otimes \dots \otimes \langle \mathbf{e}^{j_q}| \quad (3.10)$$

y recibe el nombre de *tensor de rango* $\binom{p}{q}$.

Los números $T^{i_1, \dots, i_p}_{j_1, \dots, j_q}$ son las *componentes* de dicho tensor en la base canónica anterior.

3.2.0.12 Cambio de base

Bajo un cambio de base, de la forma

$$|\mathbf{e}_{i'}\rangle = O^i_{i'} |\mathbf{e}_i\rangle \quad (3.11)$$

estas componentes se transforman de la única manera compatible con la posición de sus índices

$$T^{i'_1, \dots, i'_p}_{j'_1, \dots, j'_q} = O^{i'_1}_{i_1} \dots O^{i'_p}_{i_p} T^{i_1, \dots, i_p}_{j_1, \dots, j_q} O^{j_1}_{j'_1} \dots O^{j_p}_{j'_p}. \quad (3.12)$$

Por esta razón, a veces se dice que \mathbf{T} es un tensor p veces contravariante y q veces covariante. Debe entenderse que se trata de un abuso de lenguaje, puesto que el tensor en realidad es *invariante*. Son sus componentes las que son co(contra)variantes.

3.2.0.13 Igualmente es de tipo $\binom{p}{q}$ un tensor que tenga por componentes $T^{i_1}_{j_1} \dots^{i_p}_{j_p}$. Sin embargo no es un elemento del mismo espacio que el anterior, sino más bien de $V \otimes V^* \otimes V \otimes \dots \otimes V^* \dots \otimes V^*$. Por tanto, es importante recalcar que, aunque la notación $\binom{p}{q}$ no hace referencia más que a la posición de los índices en el sentido vertical, debemos ser cuidadosos porque en el sentido horizontal, cada índice pertenece a un espacio vectorial diferente.

3.2.0.14 Si particularizamos para $\binom{p}{q} = \binom{p}{0}$ recuperamos el espacio vectorial V . Con $\binom{p}{q} = \binom{0}{1}$ tenemos su dual V^* . Los dos casos examinados en la sección anterior se corresponden con $\binom{p}{q} = \binom{2}{0}$ y con $\binom{p}{q} = \binom{1}{1}$ respectivamente. Por definición los elementos del

cuerpo \mathbb{R} , son tensores de rango $\binom{0}{0}$ denominados escalares. Esto es, no se transforman bajo cambios de base.

3.2.0.15 Dualidad

Los espacios V^* y V son intercambiables. En este sentido, al igual que una forma, un vector puede considerarse un funcional lineal sobre elementos de V^* .

$$|\mathbf{v}\rangle : \langle \mathbf{w} | \longrightarrow |\mathbf{v}\rangle(\langle \mathbf{w} |) = \langle \mathbf{w} | \mathbf{v}\rangle,$$

y las componentes en una base se obtienen análogamente por evaluación sobre elementos de la base canónica dual

$$v^i = |\mathbf{v}\rangle(\langle \mathbf{e}^i |) = \langle \mathbf{e}^i | \mathbf{v}\rangle.$$

Siguiendo con esta manera de interpretar vectores y formas, un tensor de rango $\binom{p}{q}$, como el definido en (3.9) es un *funcional multilineal* sobre elementos del espacio dual $V^* \otimes \dots \otimes V^* \otimes V \otimes \dots \otimes V$. Es decir, \mathbf{T} es una máquina que, para producir un número, necesita tener por argumentos p formas y q vectores, y que es lineal en cada uno de esos argumentos. Por eso, a veces escribimos

$$\mathbf{T} \equiv \mathbf{T}(\cdot, \cdot, \dots; \cdot, \cdot, \dots)$$

donde hay p argumentos en primer lugar reservados para otras tantas 1-formas, y q argumentos en segundo lugar para sendos vectores.

En particular, las componentes de dicho tensor no son otras que los números que se obtienen evaluando \mathbf{T} sobre elementos de la base

$$T^{i_1, \dots, i_p}_{j_1, \dots, j_q} \equiv \mathbf{T}(\langle \mathbf{e}^{i_1} |, \dots, \langle \mathbf{e}^{i_p} |, |\mathbf{e}_{j_1}\rangle, \dots, |\mathbf{e}_{j_q}\rangle) \quad (3.13)$$

Conociendo estos números, la acción de un tensor sobre cualquier conjunto de formas y vectores se obtiene por linealidad

$$\mathbf{T}(\langle \mathbf{w}^1 |, \dots, \langle \mathbf{w}^p |, |\mathbf{v}_1\rangle, \dots, |\mathbf{v}_q\rangle) = w_{i_1}^1 \dots w_{i_p}^p T^{i_1, \dots, i_p}_{j_1, \dots, j_q} v_1^{j_1} \dots v_q^{j_q}. \quad (3.14)$$

3.2.1. Operaciones con Tensores

3.2.1.1 Espacio Vectorial Los tensores de mismo rango pueden sumarse y multiplicarse externamente por elementos de un cuerpo. De este modo forman un espacio vectorial que denominamos T_q^p .

3.2.1.2 Algebra de Tensores

Podemos definir un *producto tensorial* de la siguiente manera: dados dos tensores de rangos $\binom{p_1}{q_1}$ y $\binom{p_2}{q_2}$ podemos formar con ellos un tensor de rango $\binom{p_1+p_2}{q_1+q_2}$. Los casos más elementales ya los hemos visto. Con dos vectores $|\mathbf{v}\rangle = v^i |\mathbf{e}_i\rangle$ y $|\mathbf{w}\rangle = w^j |\mathbf{e}_j\rangle$ podemos formar el tensor $\binom{2}{0} \mathbf{T} = |\mathbf{v}\rangle \otimes |\mathbf{w}\rangle$ de componentes $T^{ij} = v^i w^j$. También hemos visto como formar un $\binom{1}{1}$ tensor a partir de un vector y una forma. La generalización es obvia. Si \mathbf{T} de rango $\binom{1}{2}$ tiene componentes $T^i_{j_1 j_2}$ y \mathbf{S} , de rango $\binom{1}{1}$ tiene componentes S^k_l entonces podemos formar $\mathbf{R} = \mathbf{T} \otimes \mathbf{S}$ de rango $\binom{2}{3}$, cuyas componentes serán obtenidas por simple multiplicación de las de T y S .

$$R^{i_1}_{j_1 j_2}{}^{i_2}_{j_3} = T^{i_1}_{j_1 j_2} S^{i_2}_{j_3} \quad (3.15)$$

3.2.1.3 Contracción

La segunda operación que podemos efectuar con un tensor cualquiera es la llamada *contracción*. Esta operación nos produce a partir de un tensor de rango $\binom{p}{q}$ otro de rango $\binom{p-1}{q-1}$. Por ejemplo tomemos el $\binom{2}{3}$ tensor \mathbf{T} de componentes $T^{i_1 i_2}_{j_1 j_2 j_3}$. Si igualamos los índices $i_2 = j_3 = k$ encontramos $T^{i_1 k}_{j_1 j_2 k}$, donde las últimas componentes están sumadas sobre todos sus valores. Decimos entonces que hemos contraído las componentes i_2 y j_3 . Probemos que este tensor es de rango $\binom{1}{2}$:

$$T^{i_1 k'}_{j_1' j_2' k'} = A^{i'}_{i} A^{k'}_{k} T^{i_1 k}_{j_1 j_2 l} A^{j_1}_{j_1'} A^{j_2}_{j_2'} A^l_{k'} \quad (3.16)$$

$$= A^{i'}_{i} T^{i_1 k}_{j_1 j_2 l} A^{j_1}_{j_1'} A^{j_2}_{j_2'} A^l_{k'} A^{k'}_{k} \quad (3.17)$$

$$= A^{i'}_{i} T^{i_1 k}_{j_1 j_2 l} A^{j_1}_{j_1'} A^{j_2}_{j_2'} \delta^l_k \quad (3.18)$$

$$= A^{i'}_{i} T^{i_1 k}_{j_1 j_2 k} A^{j_1}_{j_1'} A^{j_2}_{j_2'} \quad (3.19)$$

Por tanto, a todos los efectos $T^{i_1 k}_{j_1 j_2 k}$ se comportan frente a cambios de base como las componentes $S^{i_1}_{j_1 j_2}$ de un tensor de rango $(1, 2)$.

Podríamos haber efectuado diferentes contracciones, pues tenemos total libertad para emparejar cualquier índice de arriba con otro de abajo. En un tensor de rango $\binom{p}{q}$ hay por tanto pq contracciones independientes.

No sólo son posibles contracciones simples, sino también múltiples. Así si contraemos el resultado obtenido anteriormente encontramos $S^{i_1}_{j_1 j_2} \rightarrow R_{j_1} = S^k_{j_1 k}$, es decir un $(0, 1)$ tensor. Aquí ya no podemos seguir más por falta de un índice superior con el cual emparejar al que queda.

3.2.1.4 Contracción total

Vemos pues, que la única manera de conseguir un tensor de rango $\binom{0}{0}$ mediante el proceso de contracción es comenzar con un tensor de rango (p, p) de forma que sea posible emparejar y contraer todos los índices. El resultado es un escalar, es decir, independiente de la base en que trabajemos.

$$\left. \begin{array}{l} T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_p} \rightarrow T = T^{i_1 \dots i_p}_{i_1 \dots i_p} \\ T^{i'_1 \dots i'_p}_{j'_1 \dots j'_p} \rightarrow T' = T^{i'_1 \dots i'_p}_{i'_1 \dots i'_p} \end{array} \right\} \implies T = T' \quad (3.20)$$

Esta operación también la hemos encontrado antes. Concretamente la evaluación de una forma sobre un vector puede entenderse como la contracción de índices del $\binom{1}{1}$ tensor $\langle \mathbf{a} | \otimes | \mathbf{v} \rangle$ de componentes $a_j v^i$ para formar el $\binom{0}{0}$ tensor $\langle \mathbf{a} | \mathbf{v} \rangle = a_i v^i$

De forma más general, podemos entender el proceso de evaluación de una tensor de rango $\binom{p}{q}$ sobre su dual de rango $\binom{q}{p}$ en dos pasos. Primero se forma el producto tensorial que produce un tensor $\binom{p+q}{p+q}$ y subsecuentemente se contraen todos los índices.

En el fondo el hecho de que contracción elimine una pareja de índices, reside en el hecho de que la combinación i_i es *invariante* frente a cambios de coordenadas ya que se transforma en sí misma:

$$^{i'}_{i'} = A^{i'}_{i} A^j_{i'} \quad ^i_j = \delta^j_i \quad ^i_j = ^i_i \quad (3.21)$$

Esto es lo que hace, no sólo que la evaluación $\langle \mathbf{a} | \mathbf{v} \rangle$ sea invariante, sino que los propios tensores los sean. Por ejemplo volvemos a encontrar esta combinación en la expansión de un vector en una base $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$, de una forma $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}^i$ o de un tensor general (3.10).

3.3. Tensor Métrico y Producto Escalar Real

El producto escalar es una aplicación $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \Omega$ que verifica una serie de propiedades. Si el cuerpo es el de los números reales $\Omega = \mathbb{R}$, entonces la propiedad de hermiticidad del producto escalar se reduce a la de simetría

$$(|\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{u}\rangle) = (|\mathbf{u}\rangle, |\mathbf{v}\rangle).$$

En este caso vemos que la aplicación es bi-lineal (lineal en ambos argumentos) y, por tanto, se trata de un caso particular de un elemento de \mathcal{T}_2^0 .

3.3.0.5 Tensor métrico

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo de los reales $\Omega = \mathbf{R}$. Un tensor \mathbf{g} de rango $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ es un tensor métrico si define un producto escalar real no-degenerado. En una cierta base $\{|\mathbf{e}_i\rangle\}$ podemos expandirlo como

$$\mathbf{g} = g_{ij} \langle \mathbf{e}^i | \otimes \langle \mathbf{e}^j | \quad (3.22)$$

y viene definido por las componentes

$$g_{ij} = \mathbf{g}(|\mathbf{e}_i\rangle, |\mathbf{e}_j\rangle). \quad (3.23)$$

La única propiedad que debe imponerse a las componentes de \mathbf{g} es que formen una matriz simétrica, no-degenerada y definida positiva. Es decir, que $g_{ij} = g_{ji}$, y que todos los autovalores de esta matriz sean estrictamente positivos $\lambda_i > 0$, $\lambda_i = 1, \dots, d$. La no-degeneración implica que $\det g_{ij} \neq 0$, lo cual asegura la existencia de la matriz inversa $g^{ij} \equiv (g^{-1})_{ij}$,

$$g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j. \quad (3.24)$$

3.3.0.6 Subir y bajar índices

En el capítulo anterior estudiamos cómo un producto escalar permite establecer una aplicación entre V y V^* que es invertible si dicho producto escalar es no-degenerado. En lenguaje de componentes, a esta aplicación se le conoce como *subir y bajar índices*. En el caso presente, dado que el producto escalar es real y simétrico, la operación de subir y bajar índices es más sencilla puesto que no necesitamos prestar atención a cuál es el índice de g_{ij} que se contrae

$$\begin{aligned} v_i &= g_{ji} v^j = g_{ij} v^j \\ v^i &= g^{ji} v_j = g^{ij} v_j \end{aligned} \quad (3.25)$$

Podemos extender este procedimiento fácilmente a tensores más generales de tipo (p, q) . La idea es que podemos cambiar la posición de uno o más índices y pasar así a otro tensor de tipo $(p+n, q-n)$ donde la suma de índices coincide con la original. Por ejemplo $n = 1$

$$\begin{aligned} T^{i_1, \dots, i_{p-1}, i_p}_{j_2, \dots, j_{q+1}} g_{i_p j_1} &= T^{i_1, \dots, i_{p-1}}_{j_1, j_2, \dots, j_{q+1}} \\ T^{i_1, \dots, i_{p-1}}_{j_1 j_2, \dots, j_{q+1}} g^{i_p j_1} &= T^{i_1, \dots, i_{p-1}, i_p}_{j_2, \dots, j_{q+1}} \end{aligned} \quad (3.26)$$

y así sucesivamente.

En resumen, en presencia de un tensor métrico las componentes contravariantes y covariantes no son independientes. Por tanto, podemos restringirnos a tensores con todos los índices abajo, o arriba, según nos convenga.

3.3.0.7 Pseudo-métrica

El tensor métrico $\mathbf{g} \in \mathcal{T}_2^0$, debe ser definido positivo para representar un producto escalar. Si prescindimos de esta propiedad, hablaremos de una *pseudo-métrica*, o de un *producto pseudo-escalar*. En este caso la matriz g_{ij} puede tener autovalores positivos y negativos pero no nulos. La base que diagonaliza esta matriz se denomina pseudo-ortogonal.

$$g_{ij} = \mathbf{g}(|\mathbf{f}_i\rangle, |\mathbf{f}_j\rangle) = \lambda_i \delta_{ij}, \quad \lambda_i \neq 0$$

Si ordenamos los autovalores de menor a mayor, podemos hacer una transformación de escala $|\mathbf{e}_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}} |\mathbf{f}_i\rangle$ las nuevas componentes definen la métrica en su *forma canónica*

$$\mathbf{g}(|\mathbf{e}_i\rangle, |\mathbf{e}_j\rangle) = \eta_{ij}^{(p,q)} \equiv \text{diag}(\underbrace{-1, \dots, -1}_p, \underbrace{+1, \dots, +1}_q)$$

Vemos los distintos *tensores métricos* vienen clasificados por la *signatura* (p, q) , es decir el número de signos negativos y positivos de su forma canónica.

Ejemplos:

(i) $(p, q) = (0, N)$: *Espacio Euclídeo*

La base $|\mathbf{e}_i\rangle$ que diagonaliza la métrica se denomina *base cartesiana*

$$\mathbf{g}_E(|\mathbf{e}_i\rangle, |\mathbf{e}_j\rangle) = \delta_{ij}$$

El producto cartesiano de dos vectores es el producto escalar expresado en esta base

$$\mathbf{g}_E(|\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{w}\rangle) = \delta_{ij} v^i w^j = \sum_{i=1}^N v^i w^i \quad i, j = 1, \dots, N \quad (3.27)$$

Como $g_{ij} = \delta_{ij}$, las componentes de un vector y de su forma asociada coinciden una a una $v_i = v^j \delta_{ij} = v^i$. En otras palabras, subir y bajar índices no altera el valor numérico de las componentes.

(ii) $(p, q) = (1, 3)$: *Espacio de Minkowski*

Es el espacio vectorial \mathbb{R}^4 con la métrica de Minkowski. Convencionalmente se usan índices griegos $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$ para denotar las componentes. Los vectores se denominan *cuadrivectores* $v^\mu = (v^0, v^1, v^2, v^3)$, y el producto de Minkowski de dos de ellos es

$$\eta(|\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{w}\rangle) = -v^0 w^0 + \sum_{i=1}^3 v^i w^i. \quad (3.28)$$

donde los índices latinos i, j, \dots corren de 1 a 3. Por tanto, la matriz de coeficientes para η es $\eta_{ij} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

Vemos que en rigor el producto de Minkowski no es un producto escalar, puesto que no es definido positivo. Observamos también que el subespacio tridimensional formado por las componentes con índices latinos, forma un espacio vectorial euclídeo.

Por último notemos que las componentes v_μ de un cuadrivector y su dual v^μ se relacionan muy sencillamente $v_0 = -v^0$ y $v_i = v^i$, $i = 1, 2, 3$.

3.4. Tensores Simétricos y Antisimétricos

3.4.0.8 Tensores simétricos

Consideremos el tensor $(0, 3)$ de componentes T_{ijk} . Decimos que este tensor es *simétrico* en los índices i, j si el conjunto de números que definen sus componentes en cualquier base es invariante frente a permutación de las mismas

$$T_{ijk} = T_{jik} \quad (3.29)$$

Claramente, la simetría en los dos primeros índices podría haberse definido en forma intrínseca (sin hacer referencia a ninguna base) exigiendo que para todo conjunto de 3 vectores $|\mathbf{u}\rangle, |\mathbf{v}\rangle$ y $|\mathbf{w}\rangle$, el tensor \mathbf{T} verifique

$$\mathbf{T}(|\mathbf{u}\rangle, |\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{w}\rangle) = \mathbf{T}(|\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{u}\rangle, |\mathbf{w}\rangle) \quad (3.30)$$

Por linealidad, la condición (3.30) es equivalente a (3.29). De donde se deduce que la propiedad de simetría se expresa de igual forma en cualquier base.

La simetría se puede definir con respecto a cualquier otro par, e incluso para conjuntos más grandes de índices. En particular el anterior tensor será un *tensor totalmente simétrico* si verifica

$$T_{ijk} = T_{\pi(ijk)} \quad (3.31)$$

donde π es una permutación arbitraria de los índices.

3.4.0.9 Tensores antisimétricos

Análogamente, podemos definir tensores parcial o totalmente antisimétricos. Un tensor de tipo $(0, q)$ es antisimétrico en (por ejemplo) los tres primeros índices si verifica que para cualquier conjunto de q vectores $|\mathbf{u}_1\rangle, |\mathbf{u}_2\rangle, |\mathbf{u}_3\rangle, \dots, |\mathbf{u}_q\rangle$

$$\mathbf{T}(|\mathbf{u}_1\rangle, |\mathbf{u}_2\rangle, |\mathbf{u}_3\rangle, \dots, |\mathbf{u}_q\rangle) = (-1)^{|\pi|} \mathbf{T}(|\mathbf{u}_{\pi(1)}\rangle, |\mathbf{u}_{\pi(2)}\rangle, |\mathbf{u}_{\pi(3)}\rangle, \dots, |\mathbf{u}_{\pi(q)}\rangle) \quad (3.32)$$

La función $|\pi|$ es el orden de la permutación, y equivale al número de permutaciones elementales que la componen. En realidad solo depende de si este número es par o impar.

3.4.0.10 Simetrizador y antisimetrizador

Tomemos un tensor $(0, q)$ sin ninguna simetría aparente. A partir de dicho tensor podemos formar otros dos que sean totalmente simétricos o antisimétricos. La operación de simetrizar un cierto conjunto de índices se expresa encerrando dichos índices entre paréntesis: $T_{i_1 \dots i_q} \rightarrow T_{(i_1 \dots i_q)}$. La operación de simetrización se define de la siguiente manera

$$T_{(i_1 \dots i_q)} \equiv \frac{1}{q!} \sum_{\pi \in S(q)} T_{i_{\pi(1)} \dots i_{\pi(q)}}. \quad (3.33)$$

De manera análoga, la operación de antisimetrización se simboliza encerrando el conjunto de índices involucrados entre corchetes $T_{i_1 \dots i_q} \rightarrow T_{[i_1 \dots i_q]}$, donde ahora

$$T_{[i_1 \dots i_q]} \equiv \frac{1}{q!} \sum_{\pi \in S(q)} (-1)^{|\pi|} T_{i_{\pi(1)} \dots i_{\pi(q)}}. \quad (3.34)$$

Ejercicio 3.4.1 Muestra explícitamente que, bajo un cambio de base, se mantiene la propiedad de simetría de las componentes T_{ijk} .

Ejercicio 3.4.2 Calcular el número de componentes de un tensor de rango $(0, q)$ totalmente simétrico, o antisimétrico en dimensión d .

Ejercicio 3.4.3 Demostrar que la contracción de un par de índices simétricos, con otro par de índices antisimétricos es idénticamente nula.

Ejercicio 3.4.4 Demostrar que si $S_{i_1 \dots i_q} (A_{i_1 \dots i_q})$ es totalmente simétrico (antisimétrico) entonces coincide con $S_{(i_1 \dots i_q)} (A_{[i_1 \dots i_q]})$.

3.4.1. El símbolo alternante $\epsilon_{i_1 \dots i_d}$

En cualquier base de un espacio vectorial definimos el *símbolo alternante* $\epsilon_{i_1 \dots i_d} = \epsilon^{i_1 \dots i_d}$ mediante la condición de que $\epsilon_{12 \dots d} = 1$ y que sea totalmente antisimétrico. En rigor, el símbolo alternante no es un tensor como veremos a continuación. Mediante el símbolo $\epsilon_{i_1 \dots i_d}$ se definen diversos objetos de interés. Uno de los más utilizados es el *determinante*. Sea Λ una aplicación lineal, que en una cierta base tiene por componentes Λ^i_j , definimos el determinante

$$\det \Lambda = \Lambda^1_{i_1} \dots \Lambda^d_{i_d} \epsilon^{i_1 \dots i_d} \quad (3.35)$$

$$= \epsilon_{i_1 \dots i_d} \Lambda^{i_1}_1 \dots \Lambda^{i_d}_d \quad (3.36)$$

3.4.1.1 En d dimensiones, un tensor totalmente antisimétrico de d índices tiene sólo una componente independiente, $A_{12 \dots d} = a$. Un tensor antisimétrico es antisimétrico en cualquier base (ejercicio), de modo que en cualquier base podemos escribir $A_{i_1 \dots i_d} = a \epsilon_{i_1 \dots i_d}$ donde $\epsilon_{123 \dots d} = 1$ y a es un número real. Esto implica que los cambios de base sólo se reflejan en cambios en el valor de a . En este sentido el símbolo alternante $\epsilon_{i_1 \dots i_d}$ coincide las componentes del tensor totalmente antisimétrico A en alguna determinada base (aquella para la que $a = 1$), pero no en cualquiera. En conclusión, ϵ no es un tensor.

3.4.1.2 El antisimetrizador y el símbolo alternante

Hemos visto en (3.34) la operación de antisimetrizar un tensor arbitrario. El antisimetrizador efectúa una suma de todas las componentes con índices permutados, ponderada por la signatura de la permutación. En el caso particular de tratar con un tensor de rango maximal $q = d$ el mismo resultado se obtiene efectuando una contracción con el símbolo alternante

$$T_{[i_1 \dots i_d]} = \frac{1}{d!} T_{i_1 \dots i_d} \epsilon^{i_1 \dots i_d} \quad (3.37)$$

Esta suma sólo contiene $d!$ términos no nulos, y los índices adquieren todas las permutaciones de los valores $1, 2, 3, \dots, d$. El signo asociado proviene precisamente del valor de la componente correspondiente del símbolo alternante.

Esta observación es útil para mostrar una tercera expresión para el determinante, a medias entre (3.35) y (3.36). En efecto, es muy fácil convencerse de que $\det \Lambda$ es una expresión antisimétrica en los índices externos. Por tanto, podemos escribir

$$\det \Lambda = \frac{1}{d} \epsilon_{i_1 \dots i_d} \Lambda^{i_1}_{j_1} \dots \Lambda^{i_d}_{j_d} \epsilon^{j_1 \dots j_d} \quad (3.38)$$

Ejercicio 3.4.5 Demuestra que si el tensor $A_{i_1 \dots i_d} = a \epsilon_{i_1 \dots i_d}$ en una cierta base $|\mathbf{e}_i\rangle$, en otra base $|\mathbf{e}_{j'}\rangle = \Lambda^{i_{j'}}|\mathbf{e}_i\rangle \Rightarrow A'_{i'_1 \dots i'_d} = a' \epsilon_{i'_1 \dots i'_d}$, con $a' = a(\det \Lambda^{i_{j'}})$. Deduce el resultado análogo para tensores contravariantes $A^{i_1, \dots, i_d} = b \epsilon^{i_1, \dots, i_d}$.

Ejercicio 3.4.6 Sean A^i_j y B^i_j dos matrices de componentes de tensores (1, 1).

- Mostrar que $\det(AB) = \det A \det B$.
- Mostrar que bajo cambios de base $|\mathbf{e}_i\rangle \rightarrow |\mathbf{e}_{i'}\rangle$, el determinante es invariante $\det A = \det A'$.
- Repetir con A_{ij} y B_{ij} , matrices de tensores (0, 2) ¿Es ahora $\det A$ invariante?

3.4.1.3 Elemento de volumen

Consideremos sobre un espacio vectorial de dimensión d , un conjunto de d vectores linealmente independientes $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d$, con componentes v_a^i en una cierta base \mathbf{e}_i . Podemos formar la siguiente cantidad

$$V(|\mathbf{v}_1\rangle, \dots, |\mathbf{v}_d\rangle) = \epsilon_{i_1 \dots i_d} v_1^{i_1} \dots v_d^{i_d}. \quad (3.39)$$

que denominamos, el *volumen* subtendido por dichos vectores. En particular, esta definición asigna a la base un valor de volumen unidad

$$V(|\mathbf{e}_1\rangle, \dots, |\mathbf{e}_d\rangle) = \epsilon_{i_1 \dots i_d} \delta_1^{i_1} \dots \delta_d^{i_d} = \epsilon_{1 \dots d} = 1 \quad (3.40)$$

Supongamos un operador A que aplica los anteriores vectores sobre otra serie, $|\mathbf{v}'_1\rangle, \dots, |\mathbf{v}'_d\rangle$, con componentes $v_a'^i$ en la misma base $|\mathbf{e}_i\rangle$, mediante

$$A : |\mathbf{v}_a\rangle \rightarrow |\mathbf{v}'_a\rangle ; \quad v_a'^i = A^i_j v_a^j.$$

Entonces el nuevo volumen

$$\begin{aligned} V' &= \epsilon_{i_1 \dots i_d} v_1'^{i_1} \dots v_d'^{i_d} \\ &= \epsilon_{i_1 \dots i_d} A^{i_1}_{j_1} v_1^{j_1} \dots A^{i_d}_{j_d} v_d^{j_d} \\ &= \epsilon_{i_1 \dots i_d} A^{i_1}_{j_1} \dots A^{i_d}_{j_d} v_1^{j_1} \dots v_d^{j_d} \\ &= \det A \epsilon_{j_1 \dots j_d} v_1^{j_1} \dots v_d^{j_d} \\ &= \det A V \end{aligned} \quad (3.41)$$

De modo que $\det A$ adquiere el significado del cociente de volúmenes antes y después de una transformación. Si $\det A = 0$ entonces el volumen $V' = 0$, y eso es señal de que el conjunto $|\mathbf{v}'_1\rangle, \dots, |\mathbf{v}'_d\rangle$ no es linealmente independiente.

3.4.1.4 Transformaciones especiales

Las transformaciones especiales $SL(n, \mathbf{R}) \subset GL(n, \mathbf{R})$ no se definen como el subgrupo de transformaciones lineales que mantienen invariante el volumen. Se sigue de la ecuación (3.41) que Λ será una transformación especial si $\det(\Lambda^i_j) = 1$.

3.5. Densidades Tensoriales

Si $\epsilon_{i_1 \dots i_d}$ no es un tensor, ¿qué es? Supongamos que fuese un tensor. Como hemos dicho anteriormente su valor en una cierta base es $\{\pm 1, 0\}$, pero si lo tratamos como un tensor contravariante, podemos considerarlo un caso particular de tensor totalmente antisimétrico maximal $A_{i_1 \dots i_d}$ con

$a = 1$. Sin embargo, en otra base tendríamos que $\epsilon_{i'_1 \dots i'_d}$ tomaría valores $\{\pm(\det \Lambda^{i'}), 0\}$ (igualmente $\epsilon^{i'_1 \dots i'_d}$ tomaría valores $\{\pm(\det \Lambda^{i'}), 0\} = \{\pm(\det \Lambda^{i'})^{-1}, 0\}$), con el determinante calculado con el símbolo original.

Si insistimos en que *en cualquier base* el valor numérico de $\epsilon_{i_1 \dots i_d} = \epsilon_{i'_1 \dots i'_d} = \epsilon^{i_1 \dots i_d} = \epsilon^{i'_1 \dots i'_d} = \{\pm 1, 0\}$, (lo cual es importante para poder calcular determinantes en cualquier base con la misma fórmula) debemos introducir una ligera modificación en la regla de transformación de tensores:

$$\begin{aligned}\epsilon_{i'_1 \dots i'_d} &\equiv (\det \Lambda^{j'})^{-1} \Lambda^{i_1}_{i'_1} \dots \Lambda^{i_d}_{i'_d} \epsilon_{i_1 \dots i_d} \\ \epsilon^{i'_1 \dots i'_d} &\equiv (\det \Lambda^{j'}) \Lambda^{i_1}_{i'_1} \dots \Lambda^{i_d}_{i'_d} \epsilon^{i_1 \dots i_d}\end{aligned}\quad (3.42)$$

Definición 3.5.1 *Definimos densidad tensorial de peso h y rango (p, q) , como aquel objeto con p índices contravariantes y q covariantes, que bajo cambios de base $\mathbf{e}_i \rightarrow \mathbf{e}_{i'} = \Lambda^{i'}_{i} \mathbf{e}_i$ se transforma como sigue*

$$T^{i'_1, \dots, i'_p}_{j'_1, \dots, j'_q} = (\det \Lambda^{i'})^h \Lambda^{i_1}_{i'_1} \dots \Lambda^{i_p}_{i'_p} T^{i_1, \dots, i_p}_{j_1, \dots, j_q} \Lambda^{j_1}_{j'_1} \dots \Lambda^{j_p}_{j'_p}. \quad (3.43)$$

La nueva regla de transformación hallada en (3.42) define al símbolo alternante $\epsilon_{i_1 \dots i_d}$ ($\epsilon^{i_1 \dots i_d}$) como una *densidad tensorial* de peso $-1(+1)$.

Las siguientes propiedades se siguen automáticamente de la definición y de la regla de transformación (3.43)

- Las densidades tensoriales de peso h y rango (p, q) forman un espacio vectorial. Por tanto se pueden sumar y multiplicar por escalares.
- Los tensores pueden pensarse como un caso particular de densidades tensoriales de peso $h = 0$.
- Dos densidades tensoriales de pesos h_1 y h_2 , y rangos (p_1, q_1) y (p_2, q_2) pueden multiplicarse para dar lugar a una densidad tensorial de peso $h_1 + h_2$ y rango $(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$.

3.5.1. Densidades tensoriales a partir de tensores.

El determinante de un tensor de rango $\binom{1}{1}$ es invariante. No así el de uno de rango $\binom{2}{0}$ ó $\binom{0}{2}$. Por ejemplo, definiendo

$$\det g_{ij} = g_{1i_1} \dots g_{di_d} \epsilon^{i_1 \dots i_d}$$

Es evidente que bajo un cambio de base $|\mathbf{e}_i\rangle \rightarrow |\mathbf{e}_{i'}\rangle = \Lambda^{i'}_{i} |\mathbf{e}_i\rangle$

$$\det g_{i'j'} = \det \Lambda^{i'}_{i} g_{ij} \Lambda^{j}_{j'} = \det \Lambda^{i'}_{i} \det g_{ij} \det \Lambda^{j}_{j'} = (\det \Lambda^{i'})^2 \det g_{ij}$$

En definitiva, $\det g_{ij}$ es una densidad escalar de peso 2. Esto quiere decir que podemos definir un tensor totalmente antisimétrico a partir del símbolo de Levi-Civita. Usando la notación $g = |\det g_{ij}|$

$$w_{i_1 \dots i_d} = \sqrt{g} \epsilon_{i_1 \dots i_d} \quad (3.44)$$

se transforma como un tensor covariante.

$$\begin{aligned}w'_{i'_1 \dots i'_d} &= \sqrt{g'} \epsilon'_{i'_1 \dots i'_d} \\ &= \det \Lambda \sqrt{g} (\det \Lambda)^{-1} \Lambda^{i_1}_{i'_1} \dots \Lambda^{i_d}_{i'_d} \epsilon_{i_1 \dots i_d} \\ &= \Lambda^{i_1}_{i'_1} \dots \Lambda^{i_d}_{i'_d} w_{i_1 \dots i_d}\end{aligned}$$

A partir de $w_{i_1 \dots i_d}$ podemos definir un tensor alternante contravariante *subiendo* todos los índices con el tensor métrico

$$w^{i_1 \dots i_d} = g^{i_1 j_1} \dots g^{i_d j_d} w_{j_1 \dots j_d} \quad ; \quad w_{i_1 \dots i_d} = g_{i_1 j_1} \dots g_{i_d j_d} w^{j_1 \dots j_d}. \quad (3.45)$$

Se comprueba fácilmente que

$$w^{i_1 \dots i_d} = \frac{s}{\sqrt{g}} \epsilon^{i_1 \dots i_d} \quad (3.46)$$

donde $s = \text{sign}(g) = \frac{|\det g|}{\det g} = \pm 1$ es la signatura del tensor métrico.

Así, en los dos casos de espacios métricos estudiados en un ejemplo anterior encontramos

- Espacio Euclídeo n -dimensional: $g = s = 1$, así que $w^{i_1 \dots i_n} = \epsilon^{i_1 \dots i_n}$ y $w_{i_1 \dots i_n} = \epsilon_{i_1 \dots i_n}$
- Espacio de Minkowski 4-dimensional: $s = -1 = -g$, con lo cual $w^{i_1 \dots i_n} = -\epsilon^{i_1 \dots i_n}$ y $w_{i_1 \dots i_n} = \epsilon_{i_1 \dots i_n}$.

Ejercicio 3.5.1 En el espacio tridimensional euclídeo, expresar los productos tensoriales: $\epsilon_{ijk} \epsilon^{lmn}$; $\epsilon_{ijk} \epsilon^{lmk}$; $\epsilon_{ijk} \epsilon^{ljk}$ en términos (de productos) del tensor δ^i_j .

Ejercicio 3.5.2 Sean A^i_j las componentes de un $(1, 1)$ tensor (un operador lineal) \mathbf{A} en una cierta base de V de dimensión n . Demostrar que la siguiente cantidad

$$\det A \equiv \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} A^{i_1}_{1} A^{i_2}_{2} \dots A^{i_n}_{n}$$

es invariante bajo cambios de base.

Ejercicio 3.5.3 Demuestra la relación (3.46)

Capítulo 4

Operadores Lineales

4.1. Operadores Lineales y Antilineales

4.1.0.1 Operador Lineal

Sea V un espacio vectorial Ω . Una *aplicación* u *operador* O , con *dominio* de definición $\mathcal{D}(O) \subset V$, y *recorrido* $\mathcal{R}(O) \equiv O(\mathcal{D}(O)) \subset V$, se dirá que es lineal si $\forall |\mathbf{u}\rangle, |\mathbf{v}\rangle \in \mathcal{D}(O), \forall a \in \Omega$

$$\mathbf{OL1.} \quad O(|\mathbf{u}\rangle + |\mathbf{v}\rangle) = O|\mathbf{u}\rangle + O|\mathbf{v}\rangle$$

$$\mathbf{OL2.} \quad O(a|\mathbf{u}\rangle) = a O(|\mathbf{u}\rangle)$$

Para simplificar escribimos $O|\mathbf{u}\rangle = O(|\mathbf{u}\rangle)$. Si por el contrario O verifica

$$\begin{aligned} O(|\mathbf{u}\rangle + |\mathbf{v}\rangle) &= O|\mathbf{u}\rangle + O|\mathbf{v}\rangle \\ O(a|\mathbf{u}\rangle) &= a^* O(|\mathbf{u}\rangle). \end{aligned} \quad (4.1)$$

diremos que O es *antilineal*.

4.1.0.2 Denotamos por $\mathcal{L}(V)$ el conjunto de las aplicaciones lineales de $D(O)$ en $R(O)$. Este conjunto admite una estructura de espacio vectorial sobre Ω , sin más que definir las dos operaciones básicas como

$$\begin{aligned} (O_1 + O_2)|\mathbf{u}\rangle &\equiv O_1|\mathbf{u}\rangle + O_2|\mathbf{u}\rangle \\ (aO)|\mathbf{u}\rangle &\equiv a(O|\mathbf{u}\rangle). \end{aligned} \quad (4.2)$$

En particular, el *operador identidad* lo denotamos por \mathbb{I} , y verifica $\mathbb{I}|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{v}\rangle, \forall |\mathbf{v}\rangle \in V$.

Llamamos *operador cero*, 0 , a aquel operador que hace corresponder a todo $|\mathbf{u}\rangle \in V$ el elemento nulo $|0\rangle \in V$.

Por simplicidad, cuando no se especifique, se supondrá que el dominio $D(O)$ es todo V . En este caso, además de (4.2), podemos definir una composición de operadores en la forma

$$(O_1 O_2)|\mathbf{u}\rangle = O_1(O_2|\mathbf{u}\rangle) \quad (4.3)$$

que hace de $\mathcal{L}(V)$ un álgebra de operadores. Se utilizan de manera equivalente las dos notaciones siguientes

$$|O\mathbf{v}\rangle \equiv O|\mathbf{v}\rangle. \quad (4.4)$$

4.1.0.3 Operadores acotados

Sea H un espacio de Hilbert, y $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(H)$. Definimos la *norma* $\|\mathbf{A}\|$ mediante

$$\|\mathbf{A}\| = \sup \frac{\|\mathbf{A}|\mathbf{v}\rangle\|}{\|\mathbf{v}\rangle\|} \quad (4.5)$$

Decimos que A es un *operador acotado* si $\|\mathbf{A}\| < \infty$.

4.1.0.4 Elemento de matriz

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(H)$ un operador lineal acotado sobre un espacio de Hilbert. Dados dos vectores $|\mathbf{v}\rangle$ y $|\mathbf{w}\rangle$ definimos el *elemento de matriz*

$$\langle \mathbf{w} | \mathbf{A} \mathbf{v} \rangle \equiv \langle \mathbf{w} | \mathbf{A} | \mathbf{v} \rangle \quad (4.6)$$

4.2. Representación de un Operador

4.2.0.5 Repaso de bases duales

Recordemos que, por una parte, tenemos la base canónica dual $\langle \mathbf{e}^i |$

$$\langle \mathbf{e}^i | \mathbf{e}_j \rangle = \delta^i_j \quad (4.7)$$

y por otro, la base adjunta $\langle \mathbf{e}_i | = |\mathbf{e}_i\rangle^\dagger$ definida por la ecuación

$$\langle \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j \rangle \equiv (\langle \mathbf{e}_i |, |\mathbf{e}_j \rangle) = g_{ij} . \quad (4.8)$$

La relación entre ambas bases es, evidentemente,

$$\langle \mathbf{e}_i | = g_{ij} \langle \mathbf{e}^j | \quad ; \quad \langle \mathbf{e}^i | = g^{ij} \langle \mathbf{e}_j |$$

Para un *ket* arbitrario, el *bra* correspondiente admite un desarrollo en cualquiera de ambas bases

$$|\mathbf{v}\rangle = v^i |\mathbf{e}_i\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \langle \mathbf{v} | = v^{i*} \langle \mathbf{e}_i | = v_i \langle \mathbf{e}^i | \quad (4.9)$$

lo cual implica

$$v_i^* = g_{ij} v^j \quad (4.10)$$

En una base ortonormal $g_{ij} = \delta_{ij}$ podemos establecer una relación diagonal

$$\langle \mathbf{e}_i | = \langle \mathbf{e}^i | \quad ; \quad v_i = v^{i*} \quad (4.11)$$

Sea $|\mathbf{e}_{i'}\rangle = O^i_{i'} |\mathbf{e}_i\rangle$ un cambio de base. Si $\Omega = \mathbb{C}$, es decir H es un espacio de Hilbert complejo, la matriz de productos escalares se transforma de la manera siguiente

$$\begin{aligned} g_{i'j'} &= \langle \mathbf{e}_{i'} | \mathbf{e}_{j'} \rangle \\ &= \langle O^i_{i'} \mathbf{e}_i | O^j_{j'} \mathbf{e}_j \rangle \\ &= (O^i_{i'})^* g_{ij} O^j_{j'} \end{aligned} \quad (4.12)$$

o, en forma matricial $g' = O^\dagger g O$. Análogamente a como se hizo en (4.12), se obtiene la regla de transformación para las componentes A_{ij}

4.2.0.6 Operadores como elementos de \mathcal{T}^1_1

Un operador es una aplicación que tiene por argumento un vector y como imagen otro.

$$\mathbf{A} : |\mathbf{v}\rangle \longrightarrow |\mathbf{v}'\rangle = \mathbf{A}(|\mathbf{v}\rangle) \quad (4.13)$$

En este sentido, se trata claramente de un tensor de rango $\binom{1}{1}$. Por tanto, de manera general, dada una base $\{|\mathbf{e}_i\rangle\}$ de V , la manera más natural de representar un operador $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(V)$ es la siguiente¹

$$\boxed{\mathbf{A} = A^i_j |\mathbf{e}_i\rangle \langle \mathbf{e}^j|} \quad (4.14)$$

Las componentes A^i_j expresan la acción del operador sobre los elementos de la base ²

$$\mathbf{A} : |\mathbf{e}_i\rangle \longrightarrow |\mathbf{e}'_i\rangle = \mathbf{A}|\mathbf{e}_i\rangle = A^k_j |\mathbf{e}_k\rangle \langle \mathbf{e}^j | \mathbf{e}_i\rangle = A^k_j |\mathbf{e}_k\rangle \delta^j_i = A^k_i |\mathbf{e}_k\rangle \quad (4.15)$$

y se recuperan fácilmente utilizando la base canónica dual

$$\boxed{A^j_i = \langle \mathbf{e}^j | \mathbf{A} | \mathbf{e}_i\rangle} \quad (4.16)$$

Bajo cambio de base, $|\mathbf{e}_{i'}\rangle = O^{i'}_i |\mathbf{e}_i\rangle$, los elementos de matriz A^i_j se transforman como las componentes de un tensor $\binom{1}{1}$.

$$A^{i'}_{j'} = (O^{-1})^{i'}_i A^i_j O^j_{j'} \quad (4.17)$$

o, en forma matricial

$$A' = O^{-1} A O \quad (4.18)$$

4.2.0.7 Imagen de un vector genérico

Después de caracterizar un operador \mathbf{A} podemos extender su acción a cualquier elemento de H por linealidad,

$$|\mathbf{v}'\rangle = \mathbf{A}|\mathbf{v}\rangle = v^i \mathbf{A}|\mathbf{e}_i\rangle = v^i A^j_i |\mathbf{e}_j\rangle = v'^j |\mathbf{e}_j\rangle \quad (4.19)$$

Vemos por tanto que, las componentes del nuevo vector son funciones lineales de las del antiguo ³

$$v'^j = A^j_i v^i \quad (4.21)$$

Análogamente, el elemento de matriz de \mathbf{A} entre dos vectores arbitrarios $|\mathbf{v}\rangle$ y $|\mathbf{w}\rangle$ es

$$\langle \mathbf{w} | \mathbf{A} \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{w} | \mathbf{A} | \mathbf{v} \rangle = w_j^* A^j_i v^i. \quad (4.22)$$

4.2.0.8 Ejemplos de Operadores

1. *Identidad:* El operador identidad puede escribirse alternativamente como

$$1 = \delta^i_j |\mathbf{e}_i\rangle \langle \mathbf{e}^j| = \sum_i |\mathbf{e}_i\rangle \langle \mathbf{e}^i| \quad (4.23)$$

en una base discreta.

¹En adelante omitiremos el símbolo \otimes .

²Nótese que no usamos la notación con índices i', j' . Esto se debe a que \mathbf{A} es una transformación activa, que cambia un vector en su imagen. No se trata de un cambio de base, en el que lo que cambia es sólo la descripción del vector. El cambio de base se analiza en las ecuaciones (4.17)(4.18)(4.30) y (4.31).

³o, en notación matricial, colocando los números v^i en una columna

$$\mathbf{v}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}. \quad (4.20)$$

2. *Operador Escalera:* Dada una base discreta $\{|e_i\rangle\}$, $i = 1, 2, 3, \dots$ de V podemos definir la acción

$$T_{\pm 1}|e_i\rangle = c(i \pm 1)|e_{i \pm 1}\rangle \quad (4.24)$$

donde $c(i)$ es una constante. Claramente los elementos de matriz son $T^j_i = c(i \pm 1)\delta^j_{i \pm 1}$, es decir

$$T_{\pm 1} = \sum_{i,j \geq 1} c(j)T^j_i|e_j\rangle\langle e^i| = \sum_{i \geq 1} c(i \pm 1)|e_{i \pm 1}\rangle\langle e^i| \quad (4.25)$$

Claramente $T_{-1}|e_1\rangle = 0$, por tanto incluimos este caso imponiendo $c(0) = 0$.

4.2.0.9 Representación covariante de un operador

Si $\mathbf{A} : H \rightarrow H$ es un operador lineal, podemos tomar los siguiente elementos de matriz

$$A_{ij} = \langle e_i | \mathbf{A} | e_j \rangle \quad (4.26)$$

Este conjunto de elementos de matriz es el asociado a una representación del operador \mathbf{A} de la forma siguiente

$$\mathbf{A} = A_{ij}|e^i\rangle \otimes \langle e^j| \quad (4.27)$$

La relación entre A_{ij} y A^i_j es la evidente, y se obtiene inmediatamente usando la linealidad del producto escalar

$$A_{ij} = g_{ik}A^k_j \quad (4.28)$$

Si dicho producto escalar es no-degenerado $\det g_{ij} \neq 0$, existe la relación inversa

$$A^l_j = g^{li}A_{ij} \quad (4.29)$$

donde $g^{li}g_{ik} = \delta^l_k$.

$$\begin{aligned} A_{i'j'} &= \langle e_{i'} | \mathbf{A} | e_{j'} \rangle \\ &= (O^{i'}_i)^* \langle e_i | \mathbf{A} | e_j \rangle O^j_{j'} \\ &= (O^{i'}_i)^* A_{ij} O^j_{j'} \end{aligned} \quad (4.30)$$

O en notación matricial

$$A' = O^\dagger A O \quad (4.31)$$

donde $O^\dagger = O^{t*}$ es la matriz traspuesta y conjugada compleja. Adviértase la diferencia entre (4.18) y (4.31) que se debe a que se trata de representaciones diferentes del mismo operador. Cuando no están presentes los índices es necesario distinguir explícitamente ambas matrices, salvo en el caso de que estemos tratando con una base ortonormal.

4.2.0.10 La traza invariante

La traza de una matriz es la suma de los elementos de la diagonal. Sin embargo sólo para T^i_j tiene esta cantidad un significado invariante. En efecto $\text{tr } T = T^i_i$, es un escalar y por tanto invariante bajo cambios de base.

$$T^{i'}_{i'} = O^{i'}_i T^i_j O^j_{j'} = O^j_{j'} O^{i'}_i T^i_j = \delta^j_i T^j_i = T^i_i$$

4.2.0.11 Operador cero

Lema 4.2.1 Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(H)$ donde H es un espacio de Hilbert complejo. Si, $\forall |\mathbf{v}\rangle \in H$ encontramos que $\langle \mathbf{v} | \mathbf{A} \mathbf{v} \rangle = 0$, entonces $\mathbf{A} = 0$.

Demostración: Partiendo de $\langle \mathbf{v} + \mathbf{w} | \mathbf{A}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \rangle = 0$ y desarrollando se tiene que

$$\langle \mathbf{v} | \mathbf{A} \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{w} | \mathbf{A} \mathbf{v} \rangle = 0, \quad (4.32)$$

mientras que, partiendo de $\langle \mathbf{v} + i\mathbf{w} | \mathbf{A}(\mathbf{v} + i\mathbf{w}) \rangle = 0$ obtenemos por el contrario que

$$\langle \mathbf{v} | \mathbf{A} \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{w} | \mathbf{A} \mathbf{v} \rangle = 0, \quad (4.33)$$

es decir $\langle \mathbf{v} | \mathbf{A} \mathbf{w} \rangle = 0$, $\forall |\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{w}\rangle \in H$. En particular tomando $|\mathbf{v}\rangle = \mathbf{A}|\mathbf{w}\rangle$ tenemos que $\|\mathbf{A}|\mathbf{w}\rangle\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}|\mathbf{w}\rangle = 0$ ■

Nótese que si H fuese un espacio de Hilbert sobre \mathbb{R} , la demostración del anterior lema fallaría. Por ejemplo, en $H = \mathbb{R}^2$ con el producto escalar euclídeo, el operador R que rota cualquier vector $|\mathbf{v}\rangle = (x, y)$ $\pi/2$ en torno al origen, $R : (x, y) \rightarrow (-y, x)$ es claramente no-nulo, sin embargo verifica $\langle \mathbf{v} | R \mathbf{v} \rangle = 0 \forall |\mathbf{v}\rangle$.

4.2.0.12 Base Ortonormal

El procedimiento de Gram-Schmidt garantiza la existencia de una base ortonormal

$$g_{ij} = \langle \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}$$

En esta base, la operación de subir y bajar índices de vectores se reduce a tomar la conjugación compleja,

$$w_j = w^{i*} \delta_{ij} = w^{j*} \quad (4.34)$$

y para los elementos de matrix de \mathbf{A} a la identidad

$$A_{ij} = \delta_{ik} A^k_j = A^i_j \quad (4.35)$$

Por tanto, en una base ortonormal no hay distinción entre las dos representaciones de un operador.

4.2.0.13 Espacio Vectorial Real

En el caso particular que $\Omega = \mathbb{R}$ la matriz de productos escalares g_{ij} forma las componentes de un tensor simétrico de rango $\binom{0}{2}$ (el tensor métrico). Si la base es ortonormal la operación de subir y bajar índices es la identidad en cualquier caso

$$w_i = w^i \quad ; \quad A_{ij} = A^i_j. \quad (4.36)$$

4.2.1. Representación Continua

Si utilizamos una base continua $\{|\mathbf{w}_\alpha\rangle\} \in V$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, (por ejemplo las bases $|\vec{x}\rangle$ o $|\vec{p}\rangle$) también tenemos elementos de matrix

$$A^\alpha_\beta = \langle \mathbf{w}^\alpha | A | \mathbf{w}_\beta \rangle$$

y una representación continua

$$A = \int d\alpha d\beta A^\alpha_\beta |\mathbf{w}_\alpha\rangle \langle \mathbf{w}^\beta| \quad (4.37)$$

4.2.1.1 Operador Identidad

$$1 = \int d\alpha d\beta \delta(\alpha - \beta) |\mathbf{w}_\alpha\rangle \langle \mathbf{w}^\beta| = \int d\alpha |\mathbf{w}_\alpha\rangle \langle \mathbf{w}^\alpha| \quad (4.38)$$

en una base continua. Así por ejemplo en las bases de posición y momento respectivamente

$$1 = \int d^3x |\vec{x}\rangle \langle \vec{x}| = \int d^3p |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}| \quad (4.39)$$

4.2.1.2 Operador de Traslación

Sea $|x\rangle$ la base continua de posiciones en $L(\mathbb{R})$. Podemos considerar la acción

$$\mathbf{T}_a|x\rangle = c(x+a)|x+a\rangle \quad (4.40)$$

donde admitimos un cambio de escala dado por el número $c(x)$. Los elementos de matriz son

$$\mathbf{T}_a^{x'x} = c(x')\delta(x' - (x+a))$$

y, por tanto, admite una expansión

$$\mathbf{T}_a = \int dx dx' T^{x'x} |x'\rangle\langle x| = \int dx c(x+a) |x+a\rangle\langle x| \quad (4.41)$$

La acción de \mathbf{T}_a sobre un elemento $|f\rangle$ es inmediata en la base de posiciones

4.2.1.3 Operador Posición

Tomemos el operador de traslación T_a con $a = 0$ y $c(x) = x$. Entonces obtenemos el operador de posición

$$\mathbf{X} = \int dx x |x\rangle\langle x|$$

La acción de este operador es diagonal sobre la base de posiciones

$$\mathbf{X}|x\rangle = x|x\rangle \quad ; \quad \mathbf{X}^{x'x} = \langle x'|\mathbf{X}|x\rangle = x\delta(x' - x) \quad (4.42)$$

La acción sobre cualquier elemento $|f\rangle \in H$ es fácil de calcular en la base de posiciones

$$\begin{aligned} |\mathbf{X}f\rangle \equiv \mathbf{X}|f\rangle &= \left(\int dx x |x\rangle\langle x| \right) \int dx' f(x') |x'\rangle \\ &= \int dx' x' f(x') |x'\rangle \end{aligned} \quad (4.43)$$

o, tomando el producto dual con $\langle x|$

$$\langle x|f\rangle = f(x) \implies \langle x|\mathbf{X}f\rangle = xf(x) \quad (4.44)$$

4.2.1.4 Operador Momento:

El operador momento se define de la misma manera que el de posición actuando sobre la base de momentos

$$\mathbf{P} = \int dp p |p\rangle\langle p| \quad (4.45)$$

es decir, su acción es diagonal en esta base

$$\mathbf{P}|p\rangle = p|p\rangle \quad ; \quad P^{p'p} = \langle p'|\mathbf{P}|p\rangle = p\delta(p' - p) \quad (4.46)$$

De forma totalmente análoga al operador de posición, la acción del operador de momento es sencilla en la base de momento

$$\langle p|f\rangle = \tilde{f}(p) \implies \langle p|\mathbf{P}f\rangle = p\tilde{f}(p) \quad (4.47)$$

4.2.1.5 Cambio de Base

De la posición de los índices es evidente que si $\{|\mathbf{w}_{\gamma'}\rangle = \int d\beta O^{\beta}_{\gamma'}|\mathbf{w}\rangle_{\beta}\}$ es otra base continua, los elementos de matriz se transforman como sigue

$$\begin{aligned}
A^{\gamma'}_{\delta'} &= \langle \mathbf{w}^{\gamma'} | \mathbf{A} | \mathbf{w}_{\delta'} \rangle \\
&= \langle \mathbf{w}^{\gamma'} | \left(\int d\alpha |\mathbf{w}_{\alpha}\rangle \langle \mathbf{w}^{\alpha}| \right) \mathbf{A} \left(\int d\alpha |\mathbf{w}_{\beta}\rangle \langle \mathbf{w}^{\beta}| \right) | \tilde{\mathbf{w}}_{\delta'} \rangle \\
&= \int d\alpha d\beta \langle \mathbf{w}^{\gamma'} | \mathbf{w}_{\alpha} \rangle A^{\alpha}_{\beta} \langle \mathbf{w}_{\beta} | \mathbf{w}_{\delta'} \rangle \\
&= \int d\alpha d\beta O^{\gamma'}_{\alpha} A^{\alpha}_{\beta} O^{\beta}_{\delta'}
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Por ejemplo, supongamos que deseamos representar el operador momento $\vec{\mathbf{P}}$ en la base de posiciones. Entonces, el cambio de base viene dado por las expresiones siguientes

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipx} = \langle p|x\rangle^* \tag{4.49}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\langle x|\mathbf{P}|x'\rangle &= \int dp dp' \langle x|p\rangle \langle p|\mathbf{P}|p'\rangle \langle p'|x'\rangle \\
&= \int dp dp' \frac{1}{2\pi} e^{i(px-p'x')} p \delta(p-p') \\
&= \frac{1}{2\pi} \int dp e^{ip(x-x')} p \\
&= \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2\pi} \int dp e^{ip(x-x')} \\
&= \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \delta(x-x')
\end{aligned} \tag{4.50}$$

De modo que, en la base de posiciones

$$\mathbf{P} = \int d^3x d^3x' \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \delta(x-x') |x\rangle \langle x'| \tag{4.51}$$

Sobre una función, expandida en la base de posiciones

$$\begin{aligned}
|\mathbf{P}f\rangle &= \left(\int dx dx' \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \delta(x-x') |x\rangle \langle x'| \right) \int dy f(y) |y\rangle \\
&= \int dx dx' \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \delta(x-x') \right) f(x') |x\rangle \\
&= - \int dx dx' \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x'} \delta(x-x') \right) f(x') |x\rangle \\
&= \int dx dx' \delta(x-x') \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x'} f(x') \right) |x\rangle \\
&= \int dx' \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x'} f(x') |x'\rangle
\end{aligned} \tag{4.52}$$

O, equivalentemente

$$\langle x|\mathbf{P}f\rangle = \frac{1}{i} \partial_x f(x) \tag{4.53}$$

4.2.1.6 Relaciones de conmutación

La composición de operadores sigue la regla natural

$$(\mathbf{AB})|v\rangle = \mathbf{A}(\mathbf{B}|v\rangle) \quad (4.54)$$

Esta operación convierte a $\mathcal{A}(H)$ en un álgebra no conmutativa. Es decir, en general $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. La diferencia entre ambas expresiones puede expresarse en la base de operadores de $\mathcal{A}(H)$. Por ejemplo, para \mathbf{P} y \mathbf{X} podemos calcular el conmutador $[\mathbf{P}, \mathbf{X}]$ en una base para identificar el operador resultante:

$$\langle x|\mathbf{XP}|f\rangle = \int dx' \langle x|\mathbf{X}|x'\rangle \langle x'|\mathbf{P}|f\rangle \quad (4.55)$$

$$= \int dx' x \delta(x - x') \frac{1}{i} \partial_{x'} f(x') \quad (4.56)$$

$$= \frac{1}{i} x \partial_x f(x) \quad (4.57)$$

y por otro lado

$$\langle x|\mathbf{PX}|f\rangle = \int dx' \langle x|\mathbf{P}|x'\rangle \langle x'|\mathbf{X}|f\rangle \quad (4.58)$$

$$= \int dx' \frac{1}{i} \partial_x \delta(x - x') x' f(x') \quad (4.59)$$

$$= - \int dx' \frac{1}{i} \partial_x' \delta(x - x') x' f(x') \quad (4.60)$$

$$= \int dx' \frac{1}{i} \delta(x - x') \partial_x' (x' f(x')) \quad (4.61)$$

$$= \int dx' \frac{1}{i} \delta(x - x') (f(x') + x' \partial_{x'} f(x')) \quad (4.62)$$

$$= \frac{1}{i} f(x) + \frac{1}{i} x \partial_x f(x) \quad (4.63)$$

Restando vemos que se satisface la relación de conmutación que define el *álgebra de Heisenberg*

$$[\mathbf{X}, \mathbf{P}] = i \mathbb{I} \quad (4.64)$$

Podemos generalizar esto a una colección de operadores $\vec{\mathbf{X}} = (\mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2, \mathbf{X}^3)$ actuando sobre la base de posiciones para $L(\mathbf{R}^3)$

$$\mathbf{X}^i = \int d^3x x^i |\vec{x}\rangle \langle \vec{x}| \quad ; \quad \mathbf{X}^i |\vec{x}\rangle = x^i |\vec{x}\rangle \quad ; \quad \langle \vec{x}|\mathbf{X}^i |\vec{x}'\rangle = x^i \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

En esta base tenemos que

$$\langle \vec{x}|\mathbf{X}^i f\rangle = x^i f(\vec{x}) \quad (4.65)$$

y análogamente para el operador momento en la base $|\vec{p}\rangle$

$$\mathbf{P}^i = \int d^3p p^i |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}| \quad ; \quad \mathbf{P}^i |\vec{p}\rangle = p^i |\vec{p}\rangle \quad ; \quad \langle \vec{p}|\mathbf{P}^i |\vec{p}'\rangle = p^i \delta(\vec{p} - \vec{p}') \quad (4.66)$$

y, equivalentemente,

$$\langle \vec{p}|\mathbf{P}^i f\rangle = p^i \tilde{f}(\vec{p}) \quad (4.67)$$

Las relaciones de conmutación involucran operadores en la misma dirección

$$[\mathbf{X}^i, \mathbf{P}^j] = i \delta^{ij} \mathbb{I} \quad (4.68)$$

4.2.2. La Representación Exponencial

Dado un operador acotado $\mathbf{A} \in \mathcal{A}(H)$, definimos otro operador $\mathbf{T} = e^{\mathbf{A}}$ mediante la expansión en serie de Taylor

$$\mathbf{T} = 1 + \mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}. \blacksquare$$

La composición de exponenciales de operadores presenta diferencias con respecto a la multiplicación de números, debido a la no-conmutatividad de los operadores. Empezaremos con un caso restringido

Lema 4.2.2 Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{A}(H)$, si $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0$ entonces

$$e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}. \quad (4.69)$$

Demostración: Definamos la familia uniparamétrica de operadores $F(t) \equiv e^{t\mathbf{A}}e^{t\mathbf{B}}$, donde $t \in \mathbb{R}$ es un parámetro auxiliar. Tenemos que

$$\frac{dF}{dt} = \mathbf{A}e^{t\mathbf{A}}e^{t\mathbf{B}} + e^{t\mathbf{A}}\mathbf{B}e^{t\mathbf{B}} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})e^{t\mathbf{A}}e^{t\mathbf{B}} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})F(t), \quad (4.70)$$

donde hemos usado explícitamente que $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0$. Por simple evaluación podemos ver que la solución a esta ecuación diferencial viene dada por

$$F(t) = F(0)e^{t(\mathbf{A}+\mathbf{B})} = e^{t(\mathbf{A}+\mathbf{B})} \quad (4.71)$$

Haciendo $t = 1$ obtenemos el resultado que buscamos. \blacksquare

Si intentamos relajar algo las condiciones del teorema en seguida nos encontramos con dificultades. Un compromiso aceptable que es de gran utilidad en el contexto de la Mecánica Cuántica es el siguiente:

Teorema 4.2.1 (Baker-Cambell-Hausdorf) Sean $A, B \in \mathcal{A}(H)$, para los cuales el conmutador $[A, B]$ conmuta con A y con B , entonces se tiene que

$$e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B} + \frac{1}{2}[\mathbf{A}, \mathbf{B}]} \quad (4.72)$$

Demostración: De nuevo tomemos $F(t) = e^{t\mathbf{A}}e^{t\mathbf{B}}$ y derivemos. Ahora obtenemos que

$$\frac{dF}{dt} = \mathbf{A}e^{t\mathbf{A}}e^{t\mathbf{B}} + e^{t\mathbf{A}}\mathbf{B}e^{t\mathbf{B}} = (\mathbf{A} + e^{t\mathbf{A}}\mathbf{B}e^{-t\mathbf{A}})F(t) \quad (4.73)$$

La expansión genérica del segundo término es

$$e^{t\mathbf{A}}\mathbf{B}e^{-t\mathbf{A}} = \mathbf{B} + t[\mathbf{A}, \mathbf{B}] + \frac{t^2}{2}[\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] + \dots + \frac{t^n}{n!} \overbrace{[\mathbf{A}, [\dots[\mathbf{A}, \mathbf{B}]\dots]]}^n \quad (4.74)$$

que bajo la hipótesis del teorema se reduce a las dos primeras contribuciones $\mathbf{B} + t[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$. Por tanto

$$\frac{dF}{dt} = (\mathbf{A} + \mathbf{B} + t[\mathbf{A}, \mathbf{B}])F(t) \quad (4.75)$$

Por otro lado si ponemos

$$F(t) = F(0)e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t + \frac{1}{2}[\mathbf{A}, \mathbf{B}]t^2}. \quad (4.76)$$

es elemental comprobar que es solución de 4.75. Para ello es esencial que se verifiquen las hipótesis. Como $F(0) = 1$, poniendo $t = 1$ obtenemos el resultado deseado. \blacksquare

Ejercicios:

1. Comprobar que (4.76) verifica (4.75) bajo las hipótesis del teorema.
2. Considerar los operadores \mathbf{X} y \mathbf{P} sobre $L^2[-1, +1]$. Encontrar la forma matricial asociada a la acción de los mismos sobre la base ortonormal de Legendre. Investigar la acotación en esta forma.

4.3. Operador adjunto

4.3.0.1 *Definición de operador adjunto*

Sea $\mathbf{A} = \lambda|\mathbf{v}\rangle\langle\mathbf{w}|$. Claramente es un operador

$$\mathbf{A}|\mathbf{u}\rangle = \lambda\langle\mathbf{w}|\mathbf{u}\rangle|\mathbf{v}\rangle.$$

Definimos el operador adjunto \mathbf{A}^\dagger

$$\mathbf{A}^\dagger = (\lambda|\mathbf{v}\rangle\langle\mathbf{w}|)^\dagger = \lambda^*|\mathbf{w}\rangle\langle\mathbf{v}|$$

y extendemos esta definición de la manera natural a combinaciones lineales. La operación involucra el conjunto de reglas usuales de la aplicación adjunta, suplementada con un cambio de orden. Nótese que sin este cambio de orden no acabaríamos con un operador, sino con un número $\lambda^*\langle\mathbf{v}|\mathbf{w}\rangle$.

4.3.0.2 *Componentes del operador adjunto*

En el caso general, cualquier operador puede ser desarrollado en una base $\{|e_i\rangle\}$, de hecho de maneras diferentes. Por un lado tenemos la representación natural $\mathbf{A} \rightarrow A^i_j$

$$\mathbf{A} = A^i_j|e_i\rangle\langle e^j| \quad ; \quad A^i_j = \langle e^i|\mathbf{A}|e_j\rangle. \quad (4.77)$$

y por otro la representación covariante $\mathbf{A} \rightarrow A_{ij}$.

$$\mathbf{A} = A_{ij}|e^i\rangle\langle e^j| \quad ; \quad A_{ij} = \langle e_i|\mathbf{A}|e_j\rangle. \quad (4.78)$$

La acción de la conjugación hermítica es diferente en cada representación. En caso más sencillo se presenta cuando utilizamos la representación covariante

$$A_{ij}^\dagger = \langle e_i|\mathbf{A}^\dagger|e_j\rangle = \langle e_j|\mathbf{A}|e_i\rangle^\dagger \equiv \langle e_j|\mathbf{A}|e_i\rangle^* = A_{ji}^*. \quad (4.79)$$

Vemos que, en este caso la matriz que representa el operador es la matriz adjunta $A^\dagger = A^{t*}$. En la representación natural $\mathbf{A} \rightarrow A^i_j$ la relación es un poco menos sencilla

$$A^{\dagger i}_j = \langle e^i|\mathbf{A}^\dagger|e_j\rangle = \langle e_j|\mathbf{A}|e^i\rangle^\dagger = A^*_{j^i} = (g_{jk}A^k_l g^{li})^* \quad (4.80)$$

La ecuación (4.80) no es útil para saber si un operador es adjunto. Lo más práctico es transformar a la representación covariante

$$A^i_j \rightarrow A_{ij} = g_{ik}A^k_j \quad (4.81)$$

y utilizar (4.79). Si la base utilizada es ortonormal, $g_{ij} = \delta_{ij}$, podemos situar los índices arriba o abajo sin distinción, y ambas condiciones son idénticas

$$(A^\dagger)^i_j = (A^j_i)^*$$

Por tanto, sólo en una base ortonormal, el operador \mathbf{A}^\dagger siempre viene representado por la matriz conjugada y traspuesta de la del operador \mathbf{A} .

4.3.0.3 Operador adjunto y producto escalar

La noción de tomar el adjunto está ligada al producto escalar definido sobre H . La manera en la que se suele definir el operador adjunto es mediante la ecuación siguiente

$$(\mathbf{A}^\dagger|\mathbf{w}\rangle, |\mathbf{v}\rangle) = (|\mathbf{w}\rangle, \mathbf{A}|\mathbf{v}\rangle) \quad (4.82)$$

que es equivalente a

$$\langle \mathbf{A}^\dagger \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{w} | \mathbf{A} \mathbf{v} \rangle \equiv \langle \mathbf{w} | \mathbf{A} | \mathbf{v} \rangle. \quad (4.83)$$

Veamos como nuestra definición de operador adjunto verifica esta propiedad. Escribiendo

$$\mathbf{A}^\dagger = (A^i_j |\mathbf{e}_i\rangle \langle \mathbf{e}^j|)^\dagger = A^{i*}_j |\mathbf{e}^j\rangle \langle \mathbf{e}_i|$$

expandimos el primer miembro de (4.83)

$$\langle \mathbf{A}^\dagger \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v} | \mathbf{A}^\dagger \mathbf{w} \rangle^* = \langle \mathbf{v} | \mathbf{A}^\dagger | \mathbf{w} \rangle^* = (A^{i*}_j)^* \langle \mathbf{v} | \mathbf{e}^j \rangle^* \langle \mathbf{e}_i | \mathbf{w} \rangle^* = A^i_j \langle \mathbf{e}^j | \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{w} | \mathbf{e}_i \rangle \quad (4.84)$$

y, comparando con el de la derecha

$$\langle \mathbf{w} | \mathbf{A} \mathbf{v} \rangle = A^i_j \langle \mathbf{w} | \mathbf{e}_i \rangle \langle \mathbf{e}^j | \mathbf{v} \rangle \quad (4.85)$$

obtenemos coincidencia.

4.3.0.4 En resumen, las reglas de *tomar adjunto* se reducen

$$\begin{aligned} (\lambda)^\dagger &= \lambda^* \\ |\mathbf{v}\rangle^\dagger &= \langle \mathbf{v} | \\ \langle \mathbf{w} |^\dagger &= |\mathbf{w}\rangle \end{aligned}$$

además de invertir el orden de los objetos que no son numéricos. En particular

$$\langle \mathbf{A} \mathbf{v} | = |\mathbf{A} \mathbf{v}\rangle^\dagger \equiv (\mathbf{A} | \mathbf{v}\rangle)^\dagger = \langle \mathbf{v} | \mathbf{A}^\dagger \quad (4.86)$$

todos los miembros de esta igualdad, se definen en términos del tercero.

4.3.1. Operador Hermítico

Un operador $\mathbf{A} \in \mathcal{A}(H)$, se dice que es hermítico con respecto al producto escalar $(,)$ definido en H si coincide con su adjunto

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$$

Claramente, un operador hermítico verifica que

$$\langle \mathbf{A} \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{w} | \mathbf{A} \mathbf{v} \rangle ; \quad \forall |\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{w}\rangle \in H$$

Lo que es más interesante es que esto implica la realidad de cualquier elemento de matriz diagonal

$$\langle \mathbf{v} | \mathbf{A} \mathbf{v} \rangle^* = \langle \mathbf{A} \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v} | \mathbf{A} \mathbf{v} \rangle \in \mathbb{R} ; \quad \forall |\mathbf{v}\rangle \in H. \quad (4.87)$$

En Mecánica cuántica estos elementos de matriz tienen la interpretación de valores esperados de operaciones de medida, por tanto deben tener un carácter real.

4.3.1.1 Operador Antihermítico

Un operador que verifique

$$\mathbf{A}^\dagger = -\mathbf{A}$$

se dice que es antihermítico. Claramente a partir de un operador hermítico, $\mathbf{B} = \mathbf{B}^\dagger$, podemos formar un operador antihermítico $\mathbf{A} = i\mathbf{B}$, y viceversa. Por tanto hay una relación unívoca entre ambos conjuntos.

4.3.1.2 Exponencial de un Operador Hermítico

Si $\mathbf{B} = \pm\mathbf{B}^\dagger$ es un operador (anti)hermítico, la exponencial $\mathbf{A} = e^{\mathbf{B}}$ verifica a su vez

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^\dagger &= (e^{\mathbf{B}})^\dagger \\ &= (1 + \mathbf{B} + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2 + \dots)^\dagger \\ &= 1 \pm \mathbf{B} + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2 + \dots \\ &= e^{\pm\mathbf{B}}\end{aligned}\tag{4.88}$$

Por tanto, si \mathbf{B} es hermítico, $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}$ también. Pero si \mathbf{B} es antihermítico, $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^{-1}$.

4.3.1.3 Descomposición General :

Lema 4.3.1 *Un operador genérico \mathbf{A} se puede, siempre, descomponer en la forma $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ donde \mathbf{A} es hermítico, y \mathbf{B} es antihermítico*

Demostración: siempre podemos escribir

$$\mathbf{C} = \frac{\mathbf{C} + \mathbf{C}^\dagger}{2} + \frac{\mathbf{C} - \mathbf{C}^\dagger}{2} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\tag{4.89}$$

4.3.2. Operador Inverso

Dado un operador lineal $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(V)$, el operador inverso se define mediante la identidad

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = 1\tag{4.90}$$

4.3.3. Operador Unitario

Definición 4.3.1 *Sea \mathbf{U} invertible, se dice que es unitario con respecto al producto escalar (\cdot, \cdot) definido en H , si $\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}^{-1}$.*

Un operador unitario \mathbf{U} es una biyección lineal de H sobre H que conserva productos escalares: $\langle \mathbf{U}\mathbf{v} | \mathbf{U}\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle \quad \forall |\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{w}\rangle \in H$. En efecto

$$\langle \mathbf{U}\mathbf{v} | \mathbf{U}\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v} | \mathbf{U}^\dagger \mathbf{U}\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle\tag{4.91}$$

por lo tanto, \mathbf{U} conserva productos escalares. Un corolario de este lema es que \mathbf{U} deja invariante la matriz de productos escalares, con respecto a la cual \mathbf{U}^\dagger es el conjugado hermítico de \mathbf{U} .

$$g'_{ij} = \langle \mathbf{e}'_i | \mathbf{e}'_j \rangle = \langle \mathbf{U}\mathbf{e}_i | \mathbf{U}\mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j \rangle = g_{ij}\tag{4.92}$$

En particular, transforma toda base ortonormal de H en otra base ortonormal de H

4.3.3.1 Un operador unitario es *isométrico*. Es decir, deja invariante la norma de todo vector

$$\|\mathbf{U}|\mathbf{v}\rangle\| = \||\mathbf{v}\rangle\| \quad \forall |\mathbf{v}\rangle \in H\tag{4.93}$$

4.3.3.2 Dada una base $|\mathbf{e}_i\rangle$, la caracterización de un operador unitario en la representación natural es sencilla, sin más que escribir (4.92) en componentes

$$\begin{aligned}
g'_{ij} &= \langle \mathbf{U}\mathbf{e}_i | \mathbf{U}\mathbf{e}_j \rangle \\
&= \langle U^k{}_i \mathbf{e}_k | U^l{}_j \mathbf{e}_l \rangle \\
&= U^{k*}{}_i \langle \mathbf{e}_k | \mathbf{e}_l \rangle U^l{}_j \\
&= U^{k*}{}_i g_{kl} U^l{}_j = g_{ij}.
\end{aligned} \tag{4.94}$$

En notación matricial, la última ecuación se puede representar de manera compacta

$$U^\dagger g U = g \tag{4.95}$$

donde la matriz $U^\dagger = U^{t*}$. En una base ortonormal $g_{ij} = \delta_{ij}$ y la ecuación anterior se reduce a

$$U^\dagger U = 1. \tag{4.96}$$

Una matriz $U \rightarrow U^i{}_j$ que represente a un operador unitario \mathbf{U} tiene un determinante de modulo unidad. Para verlo basta con tomar determinantes en la ecuación matricial (4.95) y recordar que $\det U^t = \det U$

$$\det(U^{t*} g U) = (\det U)^* \det g \det U = |\det U|^2 \det g \stackrel{!}{=} \det g, \tag{4.97}$$

de aquí se deduce que $|\det U|^2 = 1$, es decir $\det U = e^{i\theta}$ donde θ es un una fase.

4.3.3.3 En la representación covariante $\mathbf{U} \rightarrow U_{ij}$ la caracterización es también sencilla, y se sigue directamente de (4.79). En efecto, si $\mathbf{U}^\dagger \rightarrow U_{ij}^\dagger = U_{ji}^*$ y $\mathbf{U}^{-1} \rightarrow U_{ij}^{-1}$ donde U^{-1} es la matriz inversa de U , entonces, de la propia definición (4.3.1) se deduce la ecuación matricial siguiente

$$U_{ij}^\dagger = U_{ij}^{-1} \tag{4.98}$$

4.4. Projector

Recordemos, que si un espacio vectorial $V = M_1 \vec{\oplus} M_2$, entonces $\forall |\mathbf{v}\rangle \in V$ existe una única descomposición $|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{v}_1\rangle + |\mathbf{v}_2\rangle$, con $|\mathbf{v}_j\rangle \in M_j$.

4.4.0.4 Projector

La aplicación lineal $\mathcal{P}_{M_1} : |\mathbf{v}\rangle \in V \rightarrow |\mathbf{v}_1\rangle \in M_1$, se llama *projector* de V sobre M_1 .

Proposición: Un operador \mathcal{P} es projector sobre $M_1 \subset V \Leftrightarrow$ es idempotente ($\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$).

Demostración:

\Rightarrow Es evidente.

\Leftarrow Dado \mathcal{P} idempotente, definamos las imágenes $M_1 \equiv \text{Im}(\mathcal{P})$ y $M_2 \equiv \text{Im}(1 - \mathcal{P})$. Es evidente que $\forall |\mathbf{v}\rangle \in V$, $|\mathbf{v}\rangle = \mathcal{P}|\mathbf{v}\rangle + (1 - \mathcal{P})|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{v}_1\rangle + |\mathbf{v}_2\rangle$, con $|\mathbf{v}_1\rangle \in M_1$ y $|\mathbf{v}_2\rangle \in M_2$ y, además, $\mathcal{P}|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{v}_1\rangle$ y $(1 - \mathcal{P})|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{v}_2\rangle$. ■

4.4.0.5 Projector Ortogonal

Si además V es espacio de Hilbert $V = H$, y con respecto al producto escalar $(\cdot, \cdot) \Rightarrow M_1 \perp M_2$ lo especificamos diciendo que $V = M_1 \oplus M_2$. **Definición** Si $\mathcal{P}_{M_1} : |\mathbf{v}\rangle \in V \rightarrow |\mathbf{v}_1\rangle \in M_1$ es un projector tal que $V = M_1 \oplus M_2$ (es decir $M_1 \perp M_2$, decimos que \mathcal{P} es un *projector ortogonal* sobre M_1 .

Los proyectores ortogonales son una especialización de los proyectores generales.

Proposición: Un operador \mathcal{P} es proyector ortogonal sobre $M \in H$ si y sólo si es idempotente y hermítico ($\Rightarrow \mathcal{P}^2 = \mathcal{P} = \mathcal{P}^+$).

Demostración: La idempotencia entra dentro del enunciado de la proposición anterior del cual, el de ésta no es sino un caso particular. Por tanto sólo nos ocuparemos de demostrar que *ortogonalidad* $\Leftrightarrow \mathcal{P} = \mathcal{P}^+$.

\Rightarrow Si \mathcal{P} es un proyector ortogonal sobre M entonces $\forall |\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{w}\rangle \in H$ tenemos que $|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{v}_1\rangle + |\mathbf{v}_2\rangle$ y $|\mathbf{w}\rangle = |\mathbf{w}_1\rangle + |\mathbf{w}_2\rangle$ son descomposiciones únicas donde $\{\mathcal{P}|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{v}_1\rangle, \mathcal{P}|\mathbf{w}\rangle = |\mathbf{w}_1\rangle\} \in M \perp \{|\mathbf{v}_2\rangle, |\mathbf{w}_2\rangle\} \in M^\perp$. Por tanto

$$\langle |\mathbf{v}\rangle, \mathcal{P}|\mathbf{w}\rangle \rangle = \langle (|\mathbf{v}_1\rangle + |\mathbf{v}_2\rangle, |\mathbf{w}_1\rangle) \rangle = \langle |\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{w}_1\rangle \rangle = \langle |\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{w}_1\rangle + |\mathbf{w}_2\rangle \rangle = \langle \mathcal{P}|\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{w}\rangle \rangle \quad (4.99)$$

de donde se deduce que $\mathcal{P} = \mathcal{P}^+$.

\Leftarrow Claramente, si \mathcal{P} es idempotente y autoadjunto, la descomposición $|\mathbf{v}\rangle = \mathcal{P}|\mathbf{v}\rangle + (1 - \mathcal{P})|\mathbf{v}\rangle$ es ortogonal, ya que

$$\langle \mathcal{P}|\mathbf{v}\rangle, (1 - \mathcal{P})|\mathbf{w}\rangle \rangle = \langle |\mathbf{v}\rangle, \mathcal{P}^+(1 - \mathcal{P})|\mathbf{w}\rangle \rangle = \langle |\mathbf{v}\rangle, \mathcal{P}(1 - \mathcal{P})|\mathbf{w}\rangle \rangle = 0$$

■

4.4.0.6 Representación de un proyector:

Sea $\{|\mathbf{e}_A\rangle\}_{A \in I}$ una base de H . Si \mathcal{I}_1 y \mathcal{I}_2 son dos conjuntos complementarios de índices, $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 = \mathcal{I}$ y, cada subconjunto de vectores $\{|\mathbf{e}_i\rangle\}_{i \in \mathcal{I}_i}$ genera un subespacio $M_i, i = 1, 2 \subset V$ con $V = M_1 \oplus M_2$. Entonces podemos representar

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{M_1} &= \sum_{i \in \mathcal{I}_1} |\mathbf{e}_i\rangle \langle \mathbf{e}_i| \\ \mathcal{P}_{M_2} &= \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_2} |\mathbf{e}_\alpha\rangle \langle \mathbf{e}_\alpha| = 1 - \mathcal{P}_{M_1} \end{aligned}$$

Es evidente que $\mathcal{P}_{M_1}^2 = \mathcal{P}_{M_1}$. Si $|\mathbf{e}_i\rangle$ es una base ortonormal $\langle \mathbf{e}_A | \mathbf{e}_B \rangle = \delta_{AB}$, entonces \mathcal{P}_{M_1} es un proyector ortogonal

$$\langle \mathcal{P}_{M_1} \mathbf{v} | \mathcal{P}_{M_2} \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v} | \mathcal{P}_{M_1}^\dagger \mathcal{P}_{M_2} \mathbf{w} \rangle = \sum_{i \in \mathcal{I}_1} \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_2} \langle \mathbf{v} | \mathbf{e}_i \rangle \langle \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_\alpha \rangle \langle \mathbf{e}_\alpha | \mathbf{w} \rangle = 0$$

lo cual también puede verse del hecho de que, en este caso, \mathcal{P}_{M_1} es hermítico.

$$\mathcal{P}_{M_1} = \sum_{i \in \mathcal{I}_1} |\mathbf{e}_i\rangle \langle \mathbf{e}_i| = \sum_{i \in \mathcal{I}_1} |\mathbf{e}_i\rangle \langle \mathbf{e}_i| = \mathcal{P}_{M_1}^\dagger \quad (4.100)$$

4.5. Valores y vectores propios

4.5.0.7 Definición. Diremos que $|\mathbf{v}\rangle$ es un vector propio de un operador lineal \mathbf{A} , con valor propio $\lambda \in \mathbb{C}$ si

$$\mathbf{A}|\mathbf{v}\rangle = \lambda|\mathbf{v}\rangle \quad (4.101)$$

El conjunto $\{\lambda\} \in \mathbb{C}$ de todos los valores propios se denomina *espectro*.

4.5.0.8 Un valor propio λ_r es g_r veces degenerado si es posible encontrar g_r vectores linealmente independientes, $|\mathbf{v}_i\rangle, i = 1, \dots, g_r$ tales que En este caso, los vectores $|\mathbf{v}_i\rangle$ generan un subespacio vectorial $V_\lambda \subset V$ de dimensión g_r . En efecto

$$\mathbf{A}\left(\sum_{i=1}^{g_r} c^i |\mathbf{v}_i\rangle\right) = \sum_{i=1}^{g_r} c^i \mathbf{A}|\mathbf{v}_i\rangle = \lambda_r \sum_{i=1}^{g_r} c^i |\mathbf{v}_i\rangle = \lambda_r \left(\sum_{i=1}^{g_r} c^i |\mathbf{v}_i\rangle\right) \quad (4.102)$$

Es frecuente utilizar la notación $V_\lambda = \text{Ker}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$.

4.5.1. Espectro de Operadores Hermíticos

Supongamos que $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$ es un operador hermítico. Encontramos entonces los dos siguientes resultados

- (i) Los valores propios de un operador hermítico son reales. Supongamos que $|\mathbf{v}\rangle$ es vector propio con valor propio λ . Entonces podemos considerarlo normalizado $\langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle = 1$ y encontramos

$$\lambda = \lambda \langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v} | \mathbf{A} | \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v} | \mathbf{A}^\dagger | \mathbf{v} \rangle^* = \langle \mathbf{v} | \mathbf{A} | \mathbf{v} \rangle^* = (\lambda \langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle)^* = \lambda^* \quad (4.103)$$

Por tanto $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (ii) Dos vectores propios, $|\mathbf{v}_1\rangle$ y $|\mathbf{v}_2\rangle$ de un mismo operador hermítico, \mathbf{A} , asociados a valores propios diferentes son ortogonales:

$$0 = \langle \mathbf{v}_1 | (\mathbf{A} - \lambda_1) | \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{A} | \mathbf{v}_2 \rangle - \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{A} | \mathbf{v}_1 \rangle^* = (\lambda_2 - \lambda_1) \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle$$

Por tanto, para $\lambda_1 \neq \lambda_2$ necesariamente $|\mathbf{v}_1\rangle \perp |\mathbf{v}_2\rangle$.

4.5.1.1 Observable

Si el espectro de un operador \mathbf{A} está constituido por un conjunto $\{\lambda_n, n = 1, 2, \dots\}$ de autovalores no degenerados, entonces podemos normalizar sus autovectores y tendremos que

$$\langle \mathbf{v}_n | \mathbf{v}_m \rangle = \delta_{nm} \quad (4.104)$$

Si algún autovalor, λ_n es g_n veces degenerado, siempre podemos ortonormalizar dentro del subespacio propio $V_{\lambda_n} \subset V$, es decir

$$\mathbf{A}|\mathbf{v}_n^i\rangle = \lambda_n^i |\mathbf{v}_n^i\rangle \quad ; \quad i = 1, \dots, g_n$$

con

$$\langle \mathbf{v}_n^i | \mathbf{v}_m^j \rangle = \delta_{nm} \delta_{ij} \quad (4.105)$$

Definición: El operador hermítico \mathbf{A} es un *observable*, si el conjunto de vectores propios forma una base de V . Esta condición equivale a la relación de cierre

$$\mathbf{1} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{g_n} |\mathbf{v}_n^i\rangle \langle \mathbf{v}_n^i| \quad (4.106)$$

4.5.2. Resolución Espectral

Si los autovectores $|\mathbf{v}_n^i\rangle$, $i = 1, \dots, g_n$ forman una base ortonormal del subespacio propio V_n , podemos escribir el proyector sobre dicho subespacio \mathcal{P}_n en la forma

$$\mathcal{P}_n = \sum_{i=1}^{g_n} |\mathbf{v}_n^i\rangle \langle \mathbf{v}_n^i| \quad (4.107)$$

Debido a la ortogonalidad es inmediato comprobar que $\mathcal{P}_n^2 = \mathcal{P}_n$.

Si λ_n , $n = 1, 2, \dots$ forma el espectro de un observable \mathbf{A} , podemos representar dicho operador en la forma

$$\mathbf{A} = \sum_n \lambda_n \mathcal{P}_n = \sum_n \sum_{i=1}^{g_n} \lambda_n |\mathbf{v}_n^i\rangle \langle \mathbf{v}_n^i| \quad (4.108)$$

4.5.2.1 Espectro continuo

En general, el espectro de un operador \mathbf{A} se divide en una parte discreta y una parte continua

$$\begin{aligned} \mathbf{A}|\mathbf{v}_n\rangle &= \lambda_n |\mathbf{v}_n\rangle & n = 1, 2, 3, \dots \\ & & i = 1, 2, 3, \dots, g_n \\ \mathbf{A}|\mathbf{v}_\nu\rangle &= \lambda(\nu) |\mathbf{v}_\nu\rangle & \nu_1 \leq \nu \leq \nu_2 \end{aligned} \quad (4.109)$$

que puede tomarse ortonormal

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}_n^i | \mathbf{v}_m^j \rangle &= \delta_{nm} \delta_{ij} \\ \langle \mathbf{v}_\nu | \mathbf{v}_{\nu'} \rangle &= \delta(\nu - \nu') \\ \langle \mathbf{v}_n^i | \mathbf{v}_\nu \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (4.110)$$

\mathbf{A} será un observable si forma una base ortonormal y tenemos la relación de cierre

$$\mathbb{I} = \sum_n \sum_{i=1}^{g_n} |\mathbf{v}_n^i\rangle \langle \mathbf{v}_n^i| + \int d\nu |\mathbf{v}_\nu\rangle \langle \mathbf{v}_\nu| \quad (4.111)$$

mientras que para \mathbf{A} escribiremos

$$\mathbf{A} = \sum_n \sum_{i=1}^{g_n} \lambda_n |\mathbf{v}_n^i\rangle \langle \mathbf{v}_n^i| + \int d\nu \lambda_\nu |\mathbf{v}_\nu\rangle \langle \mathbf{v}_\nu| \quad (4.112)$$

4.5.3. Espectro de Proyectores Ortogonales

Un proyector hermítico sobre un subespacio M_1 es ortogonal. Sus autovalores son $\lambda_{\mathbf{v}_i} = 1$ para $|\mathbf{v}_i\rangle \in M_1$ y $\lambda_{\mathbf{w}} = 0$ para todo $|\mathbf{w}\rangle$ ortogonal a $|\mathbf{v}\rangle$, $\langle \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle = 0$.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathbf{v}} |\mathbf{v}\rangle &= 0 & |\mathbf{v}\rangle \in M_1 \\ \mathcal{P}_{\mathbf{v}} |\mathbf{w}\rangle &= 0 & |\mathbf{w}\rangle \in M_2 \end{aligned} \quad (4.113)$$

Por tanto, la resolución espectral de $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ es precisamente

$$\mathcal{P}_{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^{g_n} |\mathbf{v}_i\rangle \langle \mathbf{v}_i| \quad (4.114)$$

4.5.4. Espectro de Unitarios

Si $|\mathbf{v}\rangle$ es autovector de \mathbf{U} , entonces se verifica, por una parte

$$\|\mathbf{U}|\mathbf{v}\rangle\| = \|\lambda|\mathbf{v}\rangle\| = |\lambda| \|\mathbf{v}\rangle\| \quad (4.115)$$

Si además \mathbf{U} es unitario, entonces además tenemos que

$$\|\mathbf{U}|\mathbf{v}\rangle\| = \|\mathbf{v}\rangle\| \quad (4.116)$$

De donde se deduce que, los autovalores de un operador unitario verifican $|\lambda| = 1$. Por tanto, todos los autovalores λ de \mathbf{U} son, sencillamente, fases de la forma $\lambda = e^{i\alpha}$.

4.5.5. Cálculo Variacional del Espectro de un Operador Autoadjunto

Sea $\mathbf{A} = \mathbf{A}^+$. Definamos el valor esperado $\langle \mathbf{A} \rangle_{|\mathbf{v}\rangle} \equiv \frac{\langle \mathbf{v} | \mathbf{A} | \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle}$, $0 \neq |\mathbf{v}\rangle \in H$. Claramente $\langle \mathbf{A} \rangle_{|\mathbf{v}\rangle}$ es una función real de $|\mathbf{v}\rangle$ tal que $\langle \mathbf{A} \rangle_{\alpha|\mathbf{v}\rangle} = \langle \mathbf{A} \rangle_{|\mathbf{v}\rangle}$. Por tanto puede considerarse definida sobre $\{|\mathbf{v}\rangle \in H : \|\mathbf{v}\rangle\| = 1\}$.

Teorema: (Propiedad variacional). Sea $\mathbf{A} = \mathbf{A}^+$ un operador lineal hermítico sobre un espacio de Hilbert H complejo. Sea $|\mathbf{v}_0\rangle$ un vector propio de \mathbf{A} con valor propio λ_0 . Entonces $\langle \mathbf{A} \rangle_{|\mathbf{v}\rangle}$ como función de $|\mathbf{v}\rangle$ tiene valor estacionario en $|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{v}_0\rangle$ y en ese punto se cumple que $\langle \mathbf{A} \rangle_{|\mathbf{v}_0\rangle} = \lambda_0$.

Demostración: Si trabajamos en una base ortogonal numerable $\{|\mathbf{e}_j\rangle\}_1^\infty$, podemos considerar $\langle \mathbf{A} \rangle_{|\mathbf{v}\rangle}$ como función de las componentes $\{v_j = v^{j*}\}_1^\infty$ de $|\mathbf{v}\rangle$ en dicha base. Por un lado tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial v_j} \langle \mathbf{v} | \mathbf{A} | \mathbf{v} \rangle = \frac{\partial}{\partial v_j} (v_l A^l_k v^k) = \frac{\partial v_l}{\partial v_j} A^l_k v^k + v_l A^l_k \frac{\partial v^k}{\partial v_j} = A^j_k v^k \quad (4.117)$$

mientras que por otro

$$\frac{\partial}{\partial v_j} \langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle = \frac{\partial v_i}{\partial v_j} v^i + v^{*i} \frac{\partial v_{*i}}{\partial v_j} = v^j. \quad (4.118)$$

Nótese que estamos utilizando el hecho de que $\frac{\partial z^*}{\partial z} = 0$. Por tanto el teorema presente sólo es válido si H es un espacio vectorial complejo. Luego

$$\frac{\partial}{\partial v_j} \langle \mathbf{A} \rangle_{|\mathbf{v}\rangle} = \frac{A^j_k v^k \langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{v} | \mathbf{A} | \mathbf{v} \rangle v^j}{\langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle^2} \quad (4.119)$$

que se anula si y sólo si

$$A^j_k v^k = \langle \mathbf{A} \rangle_{|\mathbf{v}\rangle} v^j \quad (4.120)$$

que no es otra que la ecuación de autovalores en componentes, por tanto tiene por solución(es) $|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{v}_0\rangle$ y $\lambda_0 = \langle \mathbf{A} \rangle_{|\mathbf{v}\rangle}$ ■

4.6. Diagonalización

4.6.0.1 Diagonalización de un operador hermítico

Sea $\{|\mathbf{e}_i\rangle\}$ una base ortonormal y \mathbf{A} un cierto operador hermítico, cuya representación en dicha base viene dada por la matriz $A^i_j = A^{j*}_i$. Podemos representar \mathbf{A} en la base normalizada $|\mathbf{v}_m\rangle$ de autovectores mediante la matriz diagonal $A^m_n = \lambda_m \delta^m_n$. Como sabemos, $|\mathbf{v}_m\rangle$ puede tomarse

como una base ortonormal (4.105). Por tanto $|\mathbf{v}_m\rangle = \mathbf{U}|\mathbf{e}_i\rangle$ donde \mathbf{U} es unitario. Otra manera de ver esto es escribir la ecuación de transformación

$$(U^{-1})^m_i A^i_j U^j_n = \lambda_n \delta^m_n \quad (4.121)$$

Tomando la conjugación hermítica de las matrices y teniendo en cuenta que $A^i_j = (A^\dagger)^i_j$ y que $\lambda_n = \lambda_n^*$, obtenemos que

$$(U^{-1})^m_i = (U^\dagger)^m_i$$

y por tanto el cambio de base se efectúa mediante una matriz unitaria.

4.6.1. Diagonalizabilidad Simultánea de Dos Operadores

Dos operadores hermíticos que conmutan entre sí son diagonalizables simultáneamente en alguna base. Para demostrarlo mencionaremos un lema previo.

Lema 4.6.1 Sean \mathbf{T} y \mathbf{S} operadores que conmutan. Si $|\mathbf{v}\rangle$ es vector propio de \mathbf{T} , $\mathbf{S}|\mathbf{v}\rangle$ también es autovector de \mathbf{T} con idéntico autovalor.

Demostración: En efecto, si $\mathbf{T}|\mathbf{v}\rangle = \lambda|\mathbf{v}\rangle$ aplicando \mathbf{S} por la izquierda encontramos $\mathbf{S}\mathbf{T}|\mathbf{v}\rangle = \mathbf{S}\lambda|\mathbf{v}\rangle$. Como $[\mathbf{S}, \mathbf{T}] = 0$, llegamos a que $\mathbf{T}(\mathbf{S}|\mathbf{v}\rangle) = \lambda\mathbf{S}|\mathbf{v}\rangle$. ■

Pueden darse dos situaciones. (i) Que λ sea un autovalor no degenerado, en cuyo caso $\mathbf{S}|\mathbf{v}\rangle$ y $|\mathbf{v}\rangle$ son necesariamente colineales. (ii) Que λ sea un valor propio degenerado, en cuyo caso, lo único que asegura el teorema anterior es que el vector $\mathbf{S}|\mathbf{v}\rangle$ pertenece al subespacio propio asociado al autovalor λ , al igual que $|\mathbf{v}\rangle$. En resumen, un enunciado equivalente al lema anterior es que, si \mathbf{T} y \mathbf{S} conmutan, todo subespacio propio de \mathbf{T} es globalmente invariante bajo la acción de \mathbf{S} .

Corolario 4.6.1 Si \mathbf{T} y \mathbf{S} son operadores que conmutan. Si \mathbf{T} es autoadjunto, y $|\mathbf{v}_1\rangle$ y $|\mathbf{v}_2\rangle$ son vectores propios de \mathbf{T} con valores propios $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces $\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{S} | \mathbf{v}_2 \rangle = 0$.

Demostración: Si $|\mathbf{v}_2\rangle$ es autovector de \mathbf{T} con autovalor λ_2 , también $\mathbf{S}|\mathbf{v}_2\rangle$ es autovector de \mathbf{T} con idéntico autovalor $\lambda_2 \neq \lambda_1$. Por tanto es ortogonal a $|\mathbf{v}_1\rangle$. ■

Llegamos así al resultado realmente importante:

Teorema 4.6.1 Si dos operadores autoadjuntos \mathbf{T} y \mathbf{S} conmutan, podemos construir una base ortonormal de H , constituida por vectores propios comunes a \mathbf{S} y a \mathbf{T} .

Demostración: Vamos a trabajar por simplicidad con un espectro discreto. Por ser \mathbf{T} hermítico admite una base ortonormal de vectores propios, que denotaremos $\{|\mathbf{e}_n^i\rangle\}$ asociados a autovalores reales λ_n con $n = 1, 2, \dots$ y con $i = 1, 2, \dots, d_n$ con d_n la degeneración del valor propio λ_n . Si ordenamos dichos autovectores en la forma $\{|\mathbf{e}_1^1\rangle, \dots, |\mathbf{e}_1^{d_1}\rangle\}; \{|\mathbf{e}_2^1\rangle, \dots, |\mathbf{e}_2^{d_2}\rangle\}; \{|\mathbf{e}_3^1\rangle, \dots\}$ entonces, la matriz que representa \mathbf{S} en esta base tiene la forma diagonal en bloques cuadrados de dimensiones $d_n \times d_n$, $n = 1, 2, \dots$ que denominaremos $\mathbf{S}^{(n)}$. Cada bloque representa la acción de \mathbf{S} sobre el subespacio propio \mathcal{H}_n asociado a λ_n ; con elementos $S_{ij}^{(n)} = \langle \mathbf{e}_n^i | \mathbf{S} | \mathbf{e}_n^j \rangle$. El hecho de que fuera de estos bloques, todos los elementos de matriz de \mathbf{S} sean nulos se desprende del lema anterior $\langle \mathbf{e}_n^i | \mathbf{S} | \mathbf{e}_m^j \rangle = 0$ para $n \neq m$. Ahora, dos situaciones pueden darse:

- (i) Si λ_n es un valor propio no degenerado de \mathbf{T} , entonces $d_n = 1$ y el autovector $|\mathbf{e}_n^1\rangle$ es automáticamente autovector de \mathbf{S} también.

(ii) Si λ_n es degenerado con $d_n > 1$, el bloque $S_{ij}^{(n)} = \langle \mathbf{e}_n^i | \mathbf{S} \mathbf{e}_n^j \rangle$ no es en general diagonal. Sin embargo, advertimos que, restringida al mismo conjunto de autovectores $\{|\mathbf{e}_n^1\rangle, \dots, |\mathbf{e}_n^{d_n}\rangle\}$, la acción del operador \mathbf{T} es proporcional a la identidad $T_{ij}^{(n)} = \lambda_n \delta_{ij}$. En consecuencia, la elección de una base dentro de \mathcal{H}_n como por ejemplo $\{|\mathbf{e}_n^1\rangle, \dots, |\mathbf{e}_n^{d_n}\rangle\}$ es totalmente arbitraria, y en cualquier base ortonormal, \mathbf{T} restringida al mismo subespacio seguirá siendo de la forma $\lambda_n I_{\mathcal{H}_n}$.

Aunque no sea diagonal, la matriz $S_{ij}^{(n)}$ sí es hermítica, $S_{ij}^{(n)} = S_{ji}^{(n)*}$, con lo que podemos efectuar *dentro de cada subespacio* \mathcal{H}_n un cambio de base que diagonalice la submatriz $S_{ij}^{(n)}$ mediante un operador unitario U , $|\mathbf{e}'_n^i\rangle = U|\mathbf{e}_n^i\rangle$

Una vez hecho esto en cada subespacio propio \mathcal{H}_n tenemos una base que simultáneamente diagonaliza las matrices que representan \mathbf{T} y \mathbf{S} en todo H . ■

Es importante destacar que no hemos probado que si \mathbf{T} y \mathbf{S} conmutan todo vector propio de \mathbf{T} sea también de \mathbf{S} . Lo que hemos demostrado es que es posible encontrar una base ortonormal de vectores propios comunes.

4.7. Operadores Hermíticos y Mecánica Cuántica

4.7.1. Postulados de la Medida

La importancia de los operadores autoadjuntos en el contexto de la Mecánica Cuántica tiene que ver con su relación con el mecanismo de medida.

- El *primer postulado* de la afirma que, a un instante fijo t_0 , el estado de un sistema físico está contenido en la elección de un vector $|\phi\rangle$, unitario $\langle\phi|\phi\rangle = 1$, perteneciente al espacio de Hilbert de estados \mathcal{H} .
- El *segundo postulado* afirma que toda magnitud física medible, está descrita por un operador observable (por tanto hermítico) \mathbf{A} .
- Los resultados de una medición (*tercer postulado*) no pueden dar como resultado más que uno de los valores propios de \mathbf{A} , $\lambda_n \in \sigma(\mathbf{A})$.
- Según el *cuarto postulado*, la probabilidad de obtener λ_n como resultado de una cierta medición, viene dada por la expresión

$$P(\lambda_n) = |\langle \mathbf{u}_n | \psi \rangle|^2 \quad (4.122)$$

donde, si λ_n es un autovalor no degenerado, $|\mathbf{u}_n\rangle$ es el autovector asociado. Si λ_n es un autovalor g_n veces degenerado

$$P(\lambda_n) = \sum_{i=1}^{g_n} |\langle \mathbf{u}_n^i | \psi \rangle|^2 \quad (4.123)$$

donde $|\mathbf{u}_n^i\rangle$ es una base ortonormal de autovectores asociados al mismo autovalor.

Esta cantidad puede escribirse de una manera más elegante utilizando el operador de proyección

$$\mathcal{P}_n = \sum_{i=1}^{g_n} |\mathbf{u}_n^i\rangle \langle \mathbf{u}_n^i| \quad (4.124)$$

Entonces claramente,

$$P(\lambda_n) = \langle \psi | \mathcal{P}_n | \psi \rangle = \|\mathcal{P}_n | \psi \rangle\|^2 \quad (4.125)$$

- El *quinto postulado*, (*reducción del paquete de ondas*) afirma que, si el resultado de una medida ha sido λ_n , el estado del sistema, inmediatamente después viene dado por el vector de estado $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\lambda_n} |\psi_n\rangle = \frac{\mathcal{P}_n|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\mathcal{P}_n|\psi\rangle}} \quad (4.126)$$

donde explícitamente hemos normalizado $\langle\psi_n|\psi_n\rangle = 1$.

4.7.1.1 Valor medio de una medida.

Sea $\{\lambda_n\} \in \sigma(\mathbf{A})$ el espectro de posibles medidas de una cierta magnitud representada por el observable \mathbf{A} . Si en el instante t_0 , sabemos con certeza que el estado del sistema viene representado por el vector $|\psi\rangle$, el valor medio de una secuencia de medidas viene dado por la expresión

$$\begin{aligned} \langle\mathbf{A}\rangle_\psi &= \sum_n \lambda_n P(\lambda_n) \\ &= \sum_n \lambda_n \langle\psi|\mathcal{P}_n|\psi\rangle \\ &= \langle\psi|\sum_n \lambda_n \mathcal{P}_n|\psi\rangle \\ &= \langle\psi|\mathbf{A}|\psi\rangle \end{aligned} \quad (4.127)$$

4.7.2. Estados Puro y Mezcla

Tomemos un par de estado $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$, normados y ortogonales

$$\langle\psi_1|\psi_1\rangle = \langle\psi_2|\psi_2\rangle = 1 \quad ; \quad \langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0$$

En cualquiera de ellos la probabilidad de medir un cierto autovalor λ_n del operador \mathbf{A} es

$$p_i(\lambda) = |\langle\mathbf{u}_n|\psi_i\rangle|^2 \quad i = 1, 2 \quad (4.128)$$

Las cantidades $\langle\mathbf{u}_n|\psi\rangle$ son números complejos, denominadas *amplitudes de probabilidad*. Es muy importante la distinción entre probabilidades y amplitudes de probabilidad, como se verá a continuación.

4.7.2.1 Superposición Coherente

Supongamos que $|\psi\rangle$ es una superposición de los dos estados anteriores $|\psi\rangle = \alpha_1|\psi_1\rangle + \alpha_2|\psi_2\rangle$, y que, con total certeza, un cierto sistema se encuentra en dicho estado. La probabilidad de encontrar λ_n como resultado de una medida asociada a \mathbf{A} viene dada por

$$\begin{aligned} p(\lambda_n) &= |\langle\mathbf{u}_n|\psi\rangle|^2 = \langle\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2|\mathbf{u}_n\rangle\langle\mathbf{u}_n|\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2\rangle \\ &= |\alpha_1|^2|\langle\mathbf{u}_n|\psi_1\rangle|^2 + |\alpha_2|^2|\langle\mathbf{u}_n|\psi_2\rangle|^2 + 2\text{Re}[(\alpha_1\alpha_2^*)\langle\mathbf{u}_n|\psi_1\rangle\langle\mathbf{u}_n|\psi_2^*\rangle] \end{aligned} \quad (4.129)$$

El último sumando es el denominado término de interferencia, y es característico de una superposición coherente. Esto es muy diferente de una mezcla estadística. Si $|\psi\rangle$ fuese el resultado de una mezcla estadística de $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ con pesos estadísticos $|\alpha_1|^2$ y $|\alpha_2|^2$, entonces el resultado que esperaríamos sería simplemente la suma ponderada de probabilidades

$$\begin{aligned} p(\lambda_n) &= |\alpha_1|^2 P_1(\lambda_n) + |\alpha_2|^2 P_2(\lambda_n) \\ &= |\alpha_1|^2 |\langle\mathbf{u}_n|\psi_1\rangle|^2 + |\alpha_2|^2 |\langle\mathbf{u}_n|\psi_2\rangle|^2 \end{aligned} \quad (4.130)$$

4.7.2.2 Mezcla Estadística

No debemos pensar que las probabilidades estadísticas no juegan ningún papel en la mecánica cuántica. En el razonamiento anterior hemos hecho la suposición de que el estado de un cierto sistema estaba representado por un cierto vector $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ con certeza absoluta. Hablar de certeza absoluta sobre el conocimiento de la función de onda, en términos de probabilidades equivale a hacer una asignación de la forma

$$P(|\psi\rangle) = 1 \quad ; \quad P(|\varphi\rangle) = 0 \quad \forall |\varphi\rangle \neq |\psi\rangle \quad (4.131)$$

En realidad son escasas las situaciones en las que podemos asignar a un sistema físico un vector $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$. Cuando esto es así hablamos de un *estado puro*. El caso genérico es aquel en el que existe una cierta indeterminación acerca de cual es el estado concreto que emerge de un cierto aparato de medida, debido principalmente a la eficiencia limitada del mismo. En este caso debemos parametrizar nuestra ignorancia, asignando al sistema una colección $\{p_\alpha, |\psi_\alpha\rangle\}$ de vectores ortonormalizados $\langle\psi_\alpha|\psi_\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}$, y probabilidades $\sum_\alpha p_\alpha = 1$ de que el sistema se halle efectivamente en dicho estado. Sería un error intentar asignar a dicho sistema una superposición de la forma

$$|\psi\rangle = \sum_\alpha p_\alpha |\psi_\alpha\rangle. \quad (4.132)$$

Ya hemos visto que esto conduce a resultados incorrectos debido a la introducción de términos de interferencia. En conclusión, *no podemos asignar un elemento de \mathcal{H} a un sistema que sea una mezcla estadística de estados.*

4.7.2.3 El Operador Densidad

El operador densidad es la herramienta apropiada para esta situación

$$\rho = \sum_\alpha p_\alpha |\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha| = \sum_\alpha p_\alpha \mathcal{P}_\alpha. \quad (4.133)$$

La descripción mediante el operador densidad contiene el caso de un estado puro, sin más que utilizar la asignación de probabilidades asociadas a una certeza. Por ejemplo $p_1 = 1$, $p_2 = p_3 = \dots = 0$.

$$\rho_{\psi_1} = |\psi_1\rangle\langle\psi_1| = \mathcal{P}_1 \quad (4.134)$$

Claramente $\rho : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ es un operador hermítico $\rho^+ = \rho$ que verifica

$$\begin{aligned} \text{tr } \rho &= \sum_{i\alpha} p_\alpha \langle \mathbf{e}^i | \psi_\alpha \rangle \langle \psi_\alpha | \mathbf{e}_i \rangle \\ &= \sum_\alpha p_\alpha \sum_i \langle \psi_\alpha | \mathbf{e}_i \rangle \langle \mathbf{e}^i | \psi_\alpha \rangle \\ &= \sum_\alpha p_\alpha \langle \psi_\alpha | \left(\sum_i |\mathbf{e}_i\rangle\langle\mathbf{e}^i| \right) | \psi_\alpha \rangle \\ &= \sum_\alpha p_\alpha \langle \psi_\alpha | \psi_\alpha \rangle \\ &= \sum_\alpha p_\alpha \\ &= 1 \end{aligned} \quad (4.135)$$

Sin embargo, ρ es un proyector solamente cuando tenemos un estado puro

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \sum_{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta |\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha|\psi_\beta\rangle\langle\psi_\beta| \\ &= \sum_\alpha p_\alpha^2 |\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha| \\ &\neq \rho \end{aligned} \quad (4.136)$$

puesto que $p_\alpha^2 < p_\alpha$. Es esta propiedad la que distingue una matriz densidad de un estado puro y un estado mezcla.

La información contenida en la matriz densidad en estados mezcla es equivalente a la información que contiene el vector de estado en un caso puro.

En particular, si A es un observable y $\{|\mathbf{u}_n\rangle\}$ es una base ortonormal de autovectores $A|\mathbf{u}_n\rangle = \lambda_n|\mathbf{u}_n\rangle$, la probabilidad de encontrar un autovalor λ_n como resultado de una cierta medida debe ser la suma ponderada de probabilidades de esa medida en cada uno de los estados $|\psi_\alpha\rangle$

$$\begin{aligned}
P(\lambda_n) &= \sum_{\alpha} p_{\alpha} P_{\alpha}(\lambda_n) \\
&= \sum_{\alpha} p_{\alpha} |\langle \mathbf{u}_n | \psi_{\alpha} \rangle|^2 \\
&= \langle \mathbf{u}_n | \left(\sum_{\alpha} p_{\alpha} |\psi_{\alpha}\rangle \langle \psi_{\alpha}| \right) | \mathbf{u}_n \rangle \\
&= \langle \mathbf{u}_n | \rho | \mathbf{u}_n \rangle \\
&= \sum_j \langle \mathbf{u}_n | \mathbf{e}_j \rangle \langle \mathbf{e}_j | \rho | \mathbf{u}_n \rangle \\
&= \sum_j \langle \mathbf{e}_j | (\rho | \mathbf{u}_n \rangle \langle \mathbf{u}_n |) | \mathbf{e}_j \rangle \\
&= \text{tr}(\rho \mathcal{P}(\mathbf{u}_n))
\end{aligned} \tag{4.137}$$

donde $\mathcal{P}(\mathbf{u}_n) = |\mathbf{u}_n\rangle \langle \mathbf{u}_n|$ es el proyector sobre el subespacio de \mathcal{H} generado por el autovector $|\mathbf{u}_n\rangle$. Igualmente podemos calcular el valor medio de \mathbf{A} en el estado representado por ρ , como la suma ponderada de los valores medios sobre cada uno de los estados puros que componen la mezcla

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{A} \rangle_{\rho} &= \sum_{\alpha} p_{\alpha} \langle \psi_{\alpha} | \mathbf{A} | \psi_{\alpha} \rangle \\
&= \sum_{\alpha, i} p_{\alpha} \langle \psi_{\alpha} | \mathbf{e}_i \rangle \langle \mathbf{e}_i | \mathbf{A} | \psi_{\alpha} \rangle \\
&= \sum_i \langle \mathbf{e}_i | \left(\sum_{\alpha} p_{\alpha} |\psi_{\alpha}\rangle \langle \psi_{\alpha}| \right) \mathbf{A} | \mathbf{e}_i \rangle \\
&= \text{tr}(\rho \mathbf{A})
\end{aligned} \tag{4.138}$$

De hecho, las fórmulas (4.137) y (4.138) son equivalentes considerando el proyector $\mathcal{P}(\mathbf{u}_n)$ como un caso particular de observable.

4.7.3. Producto Tensorial de Operadores

Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} dos operadores lineales definidos respectivamente sobre $V^{(1)}$ y $V^{(2)}$. Entonces podemos definir un operador $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ que actúa sobre $V = V^{(1)} \otimes V^{(2)}$ en la forma siguiente

$$|\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \mathbf{v}\rangle \equiv |\mathcal{A} \mathbf{v}_1\rangle \otimes |\mathcal{B} \mathbf{v}_2\rangle \equiv |\mathbf{w}\rangle \tag{4.139}$$

y linealmente sobre sumas de vectores de V .

4.7.3.1 Dada una base $\{|\mathbf{e}_{i\alpha}\rangle\}$ para $V^{(1)} \otimes V^{(2)}$, podemos encontrar una expresión para la matriz $(A \otimes B)$ que representa al operador $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ en dicha base, a partir de las matrices A y B que

representan \mathcal{A} y \mathcal{B} en las bases respectivas.

$$\begin{aligned}
|(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \mathbf{e}_{j\beta}\rangle &= |\mathcal{A}\mathbf{e}_j^{(1)}\rangle \otimes |\mathcal{B}\mathbf{e}_\beta^{(2)}\rangle \\
&= A^i_j |\mathbf{e}_i^{(1)}\rangle \otimes B^\alpha_\beta |\mathbf{e}_\alpha^{(2)}\rangle \\
&= A^i_j B^\alpha_\beta |\mathbf{e}_i^{(1)}\rangle \otimes |\mathbf{e}_\alpha^{(2)}\rangle \\
&\equiv (A \otimes B)^{i\alpha}_{j\beta} |\mathbf{e}_{i\alpha}\rangle.
\end{aligned} \tag{4.140}$$

4.7.3.2 Producto de Kroenecker de matrices

Con los datos A^i_j y B^α_β de las matrices asociadas a los operadores que componen $A \otimes B$ podemos formar una matriz que se conoce por el “producto directo”, o “producto de Kroenecker” de las matrices A y B . Si estas matrices cuadradas tienen dimensiones d_1 y d_2 respectivamente $A \otimes B$ es una matriz de dimensión $d_1 d_2$ cuyas filas y columnas están etiquetadas, cada una por un *par* de números naturales

$$(A \otimes B)^{i\alpha}_{j\beta} = A^i_j B^\alpha_\beta, \quad (1 \leq i, j \leq d_1, 1 \leq \alpha, \beta \leq d_2) \tag{4.141}$$

Una manera de visualizar la matriz anterior consiste en escribir la matriz A primero, y a continuación insertar en la entrada i_j el producto del número A^i_j por la matriz completa B . De esta manera cada número se transforma en una matriz $d_2 \times d_2$.

Con esta prescripción, por ejemplo con $d_1 = d_2 = 2$, la matriz $A \otimes B$ adopta la forma

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} A^1_1 B & A^1_2 B \\ A^2_1 B & A^2_2 B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A^1_1 B^1_1 & A^1_1 B^1_2 & A^1_2 B^1_1 & A^1_2 B^1_2 \\ A^1_1 B^2_1 & A^1_1 B^2_2 & A^1_2 B^2_1 & A^1_2 B^2_2 \\ A^2_1 B^1_1 & A^2_1 B^1_2 & A^2_2 B^1_1 & A^2_2 B^1_2 \\ A^2_1 B^2_1 & A^2_1 B^2_2 & A^2_2 B^2_1 & A^2_2 B^2_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (A \otimes B)^{11}_{11} & (A \otimes B)^{11}_{12} & (A \otimes B)^{11}_{21} & (A \otimes B)^{11}_{22} \\ (A \otimes B)^{12}_{11} & (A \otimes B)^{12}_{12} & (A \otimes B)^{12}_{21} & (A \otimes B)^{12}_{22} \\ (A \otimes B)^{21}_{11} & (A \otimes B)^{21}_{12} & (A \otimes B)^{21}_{21} & (A \otimes B)^{21}_{22} \\ (A \otimes B)^{22}_{11} & (A \otimes B)^{22}_{12} & (A \otimes B)^{22}_{21} & (A \otimes B)^{22}_{22} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.142}$$

Para la composición de operadores tensoriales tenemos dos formas equivalentes de calcular su acción matricial.

$$(A \otimes B) \cdot (A' \otimes B') = (A \cdot A') \otimes (B \cdot B') \tag{4.143}$$

donde el punto denota la multiplicación de matrices. Sin embargo, la matriz asociada a la suma de dos operadores tensoriales sólo puede calcularse en la representación ((4.142)). Es decir $(A \otimes B) + (A' \otimes B') \neq (A + A') \otimes (B + B')$.

4.7.3.3

Análogamente, un elemento de la forma $|\mathbf{v}\rangle \otimes |\mathbf{w}\rangle$ se escribe en notación matricial

$$|\mathbf{v}\rangle \otimes |\mathbf{w}\rangle = v^i w^j |\mathbf{e}_i^{(1)}\rangle \otimes |\mathbf{e}_j^{(2)}\rangle = (v^1 w^1, v^1 w^2, v^2 w^1, v^2 w^2) \begin{pmatrix} |\mathbf{e}_{11}\rangle \\ |\mathbf{e}_{12}\rangle \\ |\mathbf{e}_{21}\rangle \\ |\mathbf{e}_{22}\rangle \end{pmatrix} \tag{4.144}$$

4.7.3.4 Ejemplo :

El modelo (XXX) de Heisenberg, (o cadena de espines isotrópica) es un modelo de mecánica estadística cuyo interés teórico proviene de ser resoluble en forma exacta. Las variables de estado son vectores de $V^{\otimes N}$, donde V es un espacio vectorial de dimensión compleja 2, es decir $V \sim \mathbb{C}^2$. La formulación parte de las matrices de Pauli

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.145}$$

El observable básico es el operador de spin en cada sitio. Para la cadena de N lugares (átomos), $\vec{\sigma}_n$, $n = 1, 2, \dots, N$, se define mediante

$$\vec{\sigma}_n = \overset{1}{\mathbb{I}} \otimes \dots \otimes \overset{n}{\mathbb{I}} \otimes \vec{\sigma} \otimes \dots \otimes \overset{N}{\mathbb{I}}. \quad (4.146)$$

que son operadores sobre

$$\overset{1}{V} \otimes \dots \otimes \overset{n}{V} \otimes \dots \otimes \overset{N}{V} \quad (4.147)$$

cuya actuación es no trivial solamente sobre el espacio n -ésimo. El hamiltoniano que describe la interacción de los espines viene dado por

$$H = \sum_{n=1}^{N-1} H_{n,n+1} \quad (4.148)$$

donde el hamiltoniano de dos espines

$$H_{ij} = \frac{J}{4} (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j - \mathbb{I}^{\otimes N}). \quad (4.149)$$

Ejercicio 4.7.1

-Calcula el hamiltoniano para la cadena de dos átomos, $H = H_{12}$.

-Calcula sus autovectores y autovalores.

En el apartado anterior habrás encontrado tres autoestados de energía $E = 0$, y uno con $E = -J$. esto se entiende por la simetría $su(2)$ del modelo. En efecto, el operador de espín total es

$$\vec{S} \equiv \frac{1}{2} (\vec{\sigma} \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \vec{\sigma}) \quad (4.150)$$

- Verifica con \vec{S} el álgebra de $SU(2)$, $[S_i, S_j] = 2i\epsilon_{ijk}S_k$. Verifica también que $\vec{\sigma}^2 = 3\mathbb{I}$.

- Muestra que H_{12} , \vec{S}^2 y S_z forman un conjunto completo de observables que conmutan. Para ello, muestra que

$$H_{12} = \frac{J}{2} (\vec{S}^2 - 2\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}). \quad (4.151)$$

Este resultado indica que podemos organizar los autoestados de H_{12} en representaciones $|s, s_z\rangle$ de $SU(2)$ etiquetadas por autovalores de \vec{S}^2 y S_z , $\vec{S}^2|s, s_z\rangle = s(s+1)|s, s_z\rangle$, $S_z|s, s_z\rangle = s_z|s, s_z\rangle$. con $s_z = -s, \dots, s$; $s = 0, 1$

- Calcula la energía E del estado $|s, s_z\rangle$, y asigna números s, s_z a los autoestados hallados en la primera parte.

4.7.3.5 Puertas lógicas cuánticas

Un elemento de \mathbf{C}^2 define un bit cuántico, o *qubit*. En el contexto de la teoría cuántica de la información se suele adoptar la notación $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ para denotar la base computacional. Un ordenador cuántico es un dispositivo que recibe, como “input” un cierto vector de $V = \otimes^n \mathbf{C}^2$ y devuelve, como “output” otro elemento del mismo espacio. En suma, un computador cuántico implementa físicamente un operador unitario $\mathcal{U} : V \rightarrow V$.

La base de la teoría de la computación cuántica procura descomponer la acción más general \mathcal{U} como una sucesión (composición) de operaciones unitarias más sencillas $\mathcal{U} = u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot e_p$ llamadas *puertas lógicas*. Se demuestra que, para realizar una tarea arbitraria \mathcal{U} son suficientes tres puertas lógicas, dos de las cuales actúan sobre un sólo qubit, y la tercera sobre 2 qubits. Para un sólo qubit, las puertas lógicas más frecuentes son $NOT \rightarrow \mathcal{U}_{NOT}$, $HADAMARD \rightarrow \mathcal{U}_H$ y $FASE \rightarrow \mathcal{U}_\phi$,

$$\mathcal{U}_{NOT} : \begin{cases} |0\rangle & \rightarrow |1\rangle \\ |1\rangle & \rightarrow |0\rangle \end{cases}$$

$$\mathcal{U}_H : \begin{cases} |0\rangle & \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \\ |1\rangle & \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \end{cases}$$

$$\mathcal{U}_\phi : \begin{cases} |0\rangle & \rightarrow |0\rangle \\ |1\rangle & \rightarrow e^{i\phi}|1\rangle \end{cases}$$

\mathcal{U}_H y \mathcal{U}_ϕ , sólo tienen sentido en el contexto de la información cuántica, ya que clásicamente no tiene ningún significado una superposición. La representación gráfica del circuito asociado a estas puertas puede verse en la figura 1.1

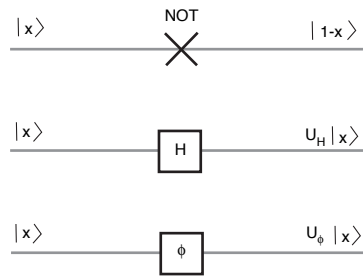


Figura 4.1: Puertas lógicas de 1 qubit.

Actuando sobre dos qubits, las puertas lógicas *NO-CONTROLADA* $\rightarrow U_{CNOT}$, y *FASE-CONTROLADA* $\rightarrow U_{C\phi}$, ejecutan una negación o una fase sobre el segundo qubit, condicionada a que el primero esté en el estado $|1\rangle$.

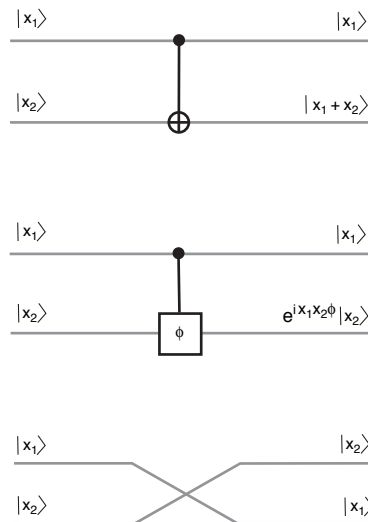


Figura 4.2: Puertas lógicas de 2 qubit.

La puerta *SWAP* ejecuta una permutación del valor de cada qubit. En la figura 1.2 vemos los circuitos lógicos asociados.

$$\mathcal{U}_{\text{CNOT}} : \begin{cases} |00\rangle \rightarrow |00\rangle \\ |01\rangle \rightarrow |01\rangle \\ |10\rangle \rightarrow |11\rangle \\ |11\rangle \rightarrow |10\rangle \end{cases}$$

$$\mathcal{U}_{\text{C}\phi} : \begin{cases} |00\rangle \rightarrow |00\rangle \\ |01\rangle \rightarrow |01\rangle \\ |10\rangle \rightarrow |10\rangle \\ |11\rangle \rightarrow e^{i\phi}|11\rangle \end{cases}$$

$$\mathcal{U}_{\text{SWAP}} : \begin{cases} |00\rangle \rightarrow |00\rangle \\ |01\rangle \rightarrow |10\rangle \\ |10\rangle \rightarrow |01\rangle \\ |11\rangle \rightarrow |11\rangle \end{cases}$$

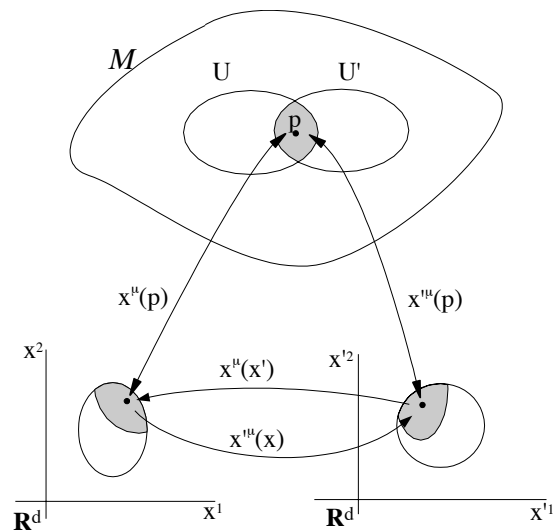
4.7.3.6 *Operador Densidad Asociado a Un Sistema Bi-partito*
 Noción de traza parcial, y decoherencia.

Capítulo 5

Elementos de Geometría Diferencial

5.1. Sistemas Generales de Coordenadas

En una variedad diferencial, la noción de sistema local de coordenadas es instrumental. En general nos encontraremos con una variedad diferencial arbitraria M de dimensión D , dotada de un atlas coordinado $\{O_\alpha, x_\alpha^i\}_{\alpha=1, \dots, N}$. En la intersección $O_\alpha \cap O_\beta$ tendremos las funciones de transición $x_\beta^i = x_\beta^i(x_\alpha)$.



De modo que, por simplificar la notación, dos sistemas de coordenadas cualesquiera $\{x^i\}$ y $\{x'^i\}$ se relacionan mediante un conjunto de D funciones arbitrarias

$$x'^i = f^i(x) \quad i = 1, \dots, D$$

Un requisito técnico pero importante exige que el jacobiano no se anule

$$J = \left| \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \right| = \left| \frac{\partial f^i(x)}{\partial x^j} \right| \neq 0 .$$

lo cual es condición necesaria y suficiente para que el cambio de coordenadas sea invertible

$$x^i = f^{-1}{}^i(x') \quad i = 1, \dots, D$$

En terminología más precisa, un cambio de coordenadas es un difeomorfismo $f : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}^D$.

5.2. Espacio Tangente

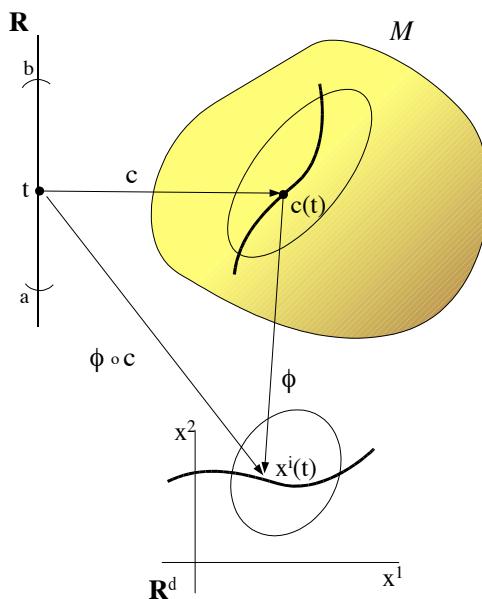
Localmente una variedad diferencial M de dimensiones isomorfa a \mathbb{R}^D . Ello permite transportar la herramienta del cálculo diferencial a entorno infinitesimal de un punto arbitrario.

5.2.1. Curvas

Una curva es una aplicación de \mathbf{R} en M

$$\begin{aligned} c : \mathbb{R} &\rightarrow M \\ p &\rightarrow c(p) \end{aligned} \tag{5.1}$$

Si usamos coordenadas $t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ y $x^i \in U \subset M$ para un abierto U en M , entonces la curva viene especificada por el conjunto de funciones coordenadas $\varphi \circ c : t \rightarrow x^i(t)$.



5.2.1.1 Curvas coordenadas:

Un caso importante es el conjunto de curvas que mantienen todas las coordenadas constantes menos una. Por ejemplo, la curva coordenada asociada a x^1 viene dada por

$$t \rightarrow (x^1(t) = t, x^2, \dots, x^D)$$

Y así sucesivamente para $x^2(t)$ etc.

5.2.2. Funciones $\mathcal{F}(M)$

Una función real $\phi \in \mathcal{F}(M)$ es una aplicación de M en \mathbb{R}

$$\begin{aligned} \phi : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\rightarrow \phi(p) \end{aligned} \tag{5.2}$$

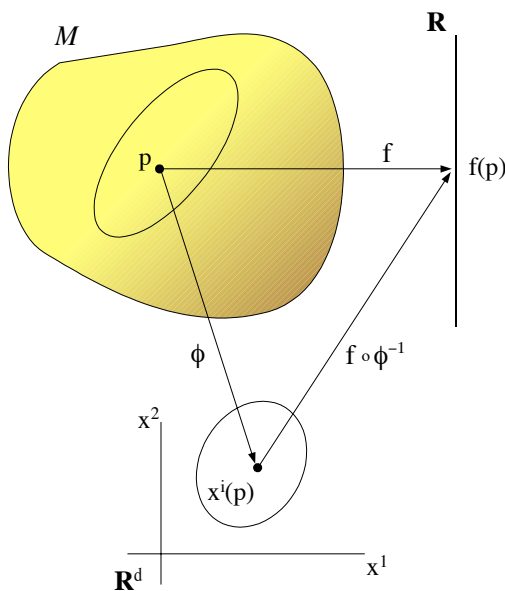
Sean $x^i = \varphi^i(p)$ coordenadas para un abierto $U \subset M$, entonces la función sobre M viene especificada por la aplicación $\{x^i\} \rightarrow \phi(\varphi^{-1}(x))$.

La función coordenada es una función que asigna el valor de la coordenada k -ésima a un punto p .

5.2.2.1 Funciones coordenadas

Dado un abierto punto p perteneciente a un abierto (U, φ) , el propio mapa coordenado $\phi = \varphi_i : p \rightarrow x^i = \varphi^i(p) = \varphi^i(\varphi^{-1}(x))$ puede considerarse como el primer ejemplo de función que denominamos función coordenada.

5.2.2.2 Funciones sobre curvas



Una curva c es una subvariedad de M , y por tanto la restricción de ϕ a c es una función de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. En coordenadas $t, \phi \in \mathbb{R}$

$$t \rightarrow \phi(t) = \phi(x^i(t))$$

5.2.3. Vectores Tangentes

Un vector es un operador asociado a una curva $c(t)$ en un punto $p = c(t_0)$. Este operador evalúa cuánto cambian las funciones definidas sobre dicha curva a su paso por el punto p .

De manera abstracta sabemos la respuesta $\frac{d\phi(t)}{dt}$. Ocurre, sin embargo, que ϕ es una función de t a través de las coordenadas de la curva $x^i(t)$. Por tanto la operación concreta que hay que realizar involucra la regla de la cadena

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{dx^i(t)}{dt} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^i}$$

Como ϕ puede ser cualquier función, escribiremos la identidad operatorial

$$|\mathbf{V}\rangle \equiv \frac{d}{dt} = \frac{dx^i(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} = V^i(x(t))\partial_i \quad (5.3)$$

Se dice que \vec{V} es un vector tangente a la curva, y $V^i = dx^i(t)/dt$ las componentes de dicho vector. La variación de una función a lo largo de la curva viene dada por la acción del vector tangente $\phi \rightarrow |\mathbf{V}\rangle[\phi]$.

Los vectores tangentes a las curvas coordenadas son precisamente las derivadas parciales $|\mathbf{e}_i\rangle = \partial_i$. Estos operadores forman una base del espacio de vectores tangentes a M en el punto p . Es decir, cualquier variación se puede calcular como una combinación lineal de variaciones a lo largo de curvas coordenadas.

El espacio vectorial de todos estos operadores se denomina *Espacio Tangente* a la variedad M en el punto p , $\mathcal{T}_p(M)$.

5.2.3.1 Cambio de Base

En la región de intersección de dos abiertos $U \cup U'$ tenemos dos sistemas de coordenadas x^i y $x^{i'}$ a disposición. Las bases tangentes asociadas serán $|\mathbf{e}_i\rangle = \partial_i = \partial/\partial x^i$, y $|\mathbf{e}_{i'}\rangle = \partial_{i'} = \partial/\partial x^{i'}$. Claramente una función $\phi(p)$ admite una representación coordenada en cada sistema de coordenadas

$$\phi'(x') = \phi(x(x'))$$

Paralelamente, la evaluación de $|\mathbf{e}_{i'}\rangle(|\mathbf{e}_i\rangle)$ solo se puede hacer sobre la expresión de la izquierda (derecha). Ambas se relacionan mediante la regla de la cadena

$$|\mathbf{e}_{i'}\rangle[\phi'] = \frac{\partial\phi'(x')}{\partial x^{i'}} = \frac{d\phi'(x')}{dx^{i'}} = \frac{d\phi(x(x'))}{dx^{i'}} = \frac{dx^i}{dx^{i'}} \frac{\partial\phi(x)}{\partial x^i} = \Lambda^{i'}{}^i |\mathbf{e}_i\rangle[\phi] \quad (5.4)$$

Como ϕ es arbitraria, vemos que la matriz que define el *cambio de base coordenada* en el espacio tangente está directamente correlacionada con el *cambio de sistema de coordenadas*

$$\partial_{i'} = \Lambda^{i'}{}^i \partial_i \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda^{i'}{}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \quad (5.5)$$

La invariancia de $V = V^i \partial_i = V^{i'} \partial_{i'}$ implica en la forma usual la regla de transformación contra-variante para las componentes $V^{i'} = \Lambda^{i'}{}^i V^i$, donde las matrices $\Lambda^{i'}{}^i$ y $\Lambda^i{}_{i'}$ son, consistentemente, inversas la una de la otra

$$\Lambda^{i'}{}^i \Lambda^i{}_{j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j$$

Ejercicio 5.2.1 Considera la esfera S^2 de radio unidad, definida como el conjunto de puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sometidos a la ligadura $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Considera el mapa estereográfico $\varphi : U_{\pm} = S^2/(0, 0, \mp 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \varphi_+ : (x, y, z) \in U_+ &\longrightarrow (x_+, x_+) = \left(\frac{x}{1+z(x, y)}, \frac{y}{1+z(x, y)} \right) \in \mathbb{R}^2 \\ \varphi_- : (x, y, z) \in U_- &\longrightarrow (x_-, x_-) = \left(\frac{x}{1-z(x, y)}, \frac{y}{1-z(x, y)} \right) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Halla las funciones de transición $x_{\pm}^i = x_{\pm}^i(x_{\mp})$. Dibuja las curvas coordenadas x_+^1 y x_+^2 y halla las componentes de una base coordenada tangente en la otra y viceversa.

5.2.3.2 Campo Vectorial

El espacio tangente, $\mathcal{T}_p(M)$, es una noción ligada a un punto p . Un campo vectorial es una elección de un elemento de cada espacio tagente, de manera que el resultado sea continuo y diferenciable.

De manera práctica, basta con contar con coordenadas x^i en un abierto $U \subset M$, y dejar que las componentes V^i que especifican un vector en cada punto sean funciones continuas y diferenciables de x^i

$$|\mathbf{V}\rangle = V^i(x)\partial_i \quad (5.6)$$

donde ahora $x^i = x^i(p)$ y p recorre todo el abierto U . El cambio de coordenadas $x^i \rightarrow x^{i'}(x)$ ahora afecta también al argumento de las funciones V^i

$$V^{i'}(x'(x)) = \Lambda^{i'}_i(x)V^i(x)$$

Advertencia: El espacio tangente $\mathcal{T}_p(M)$ tiene dimensión finita, igual a la dimensión de M . Por contra, el espacio $\mathcal{T}(M)$ tiene dimensión infinita, puesto que las componentes de un campo vectorial son funciones $V^i(x) \in \mathcal{F}(M)$.

5.3. Tensores Generales

5.3.1. Co-Vectores Tangentes

Al espacio vectorial $\mathcal{T}_p(M)$ le está asociado, de forma natural, un espacio dual, $\mathcal{T}_p^*(M)$, cuyos elementos son 1-formas lineales sobre $\mathcal{T}_p(M)$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{w} | : \mathcal{T}_p(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ |\mathbf{V}\rangle &\rightarrow \langle \mathbf{w} | \mathbf{V}\rangle = a \end{aligned} \quad (5.7)$$

La base canónica dual $\langle \mathbf{e}^i |$, verifica

$$\langle \mathbf{e}^i | \mathbf{e}_j \rangle = \delta^i_j$$

□ Un co-vector tangente admitirá por tanto una expansión en una base coordenada $\langle \mathbf{w} | = w_i \langle dx^i |$ de forma que el producto dual con un vector arbitrario viene dado por la contracción natural de componentes.

$$a = \langle \mathbf{w} | \mathbf{v}\rangle = w_i v^j \langle dx^i | \partial_j \rangle = w_i V^j \delta^i_j = w_i v^i$$

5.3.1.1 Campos de 1-formas:

Al igual que los campos vectoriales, la extensión de componentes w_i a funciones $w_i(x)$ sobre M permite definir un campo de 1-formas $\mathbf{w} = w_i(x)dx^i \in \mathcal{T}^*(M)$.

5.3.1.2 El gradiente

Sea un campo vectorial $|\mathbf{V}\rangle \in \mathcal{T}(M)$. En un punto arbitrario $p \in M$ tenemos dos maneras de producir un número. Por un lado podemos hacer actuar V sobre una función $f \in \mathcal{F}(M)$ para obtener $V[f]$, su variación a lo largo de la curva a la que V es tangente en ese punto. Por otro lado, podríamos escoger un elemento de $\langle \mathbf{w} | \in \mathcal{T}^*(M)$ y efectuar la contracción $\langle \mathbf{w} | \mathbf{V}\rangle$. Definimos la 1-forma *gradiente* de f , que denotamos $\langle df |$, como aquella 1-forma que verifica

$$\langle df | \mathbf{V}\rangle = \mathbf{V}[f] \quad (5.8)$$

para todo campo vectorial \mathbf{V} .

En un sistema de coordenadas, podemos expandir $\langle df | = \partial_i f(x) \langle dx^i |$ y $\mathbf{V} = V^j(x) |\partial_j\rangle$ y encontramos coincidencia

$$\langle df | \mathbf{V} \rangle = \partial_i f(x) V^i = (V^i \partial_i) f(x) = \mathbf{V}[f] \quad (5.9)$$

En particular, los propios elementos de la base co-tangente $\langle dx^i |$ son las 1-formas gradiente de las funciones coordenadas $f(p) = x^i(p)$.

5.3.2. Tensores de Rango (p, q)

Fijemos coordenadas $\{x^i\}$ para nuestra variedad (o un abierto de ella), entonces en cada punto la base coordenada $\{\partial/\partial x^i\}$ es un conjunto de elementos de $\mathcal{T}_x M$. Análogamente, una combinación lineal dependiente del punto, en la forma $\mathbf{V} = V^i(x) \partial/\partial x^i$ será un campo vectorial si y sólo si las funciones $V^i(x)$ son C^∞ . De forma general, un sistema de coordenadas define una base de dimensión D^{p+q} para el espacio de campos tensoriales $\mathcal{T}_x M_q^p$ en cada punto x .

$$\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q} \quad (5.10)$$

Un campo tensorial involucra otras tantas funciones componentes $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}(x)$.

$$\mathbf{T} = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}(x) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q} \quad (5.11)$$

□ donde, evidentemente hay que comparar ambos miembros en el mismo sistema de coordenadas, bien sea sustituyendo $x' = x'(x)$ en la izquierda, o bien, $x = x(x')$ en la derecha.

Advertencia: La denominación “tensores *generales*”, hace referencia a que no hay restricción alguna sobre los cambio de coordenadas $x \rightarrow x'(x)$ (a parte de los naturales que implican la no-degeneración y continuidad). Por defecto, cuando se omite el calificativo, se entenderá que un tensor es general, mientras que cuando tratemos con transformaciones restringidas de coordenadas, hablaremos de tensores minkowskianos, o tensores de rotaciones, o galileanos, etc.

5.4. Flujos y Derivadas de Lie

5.4.1. Curva Integral

5.4.1.1 Curva Integral

Sea \mathbf{V} un campo vectorial sobre una variedad M . Una curva $x^i(t)$ será curva integral del campo vectorial \mathbf{V} si en todo punto sobre la misma, el vector tangente y el representante del campo coinciden. En una base coordenada podemos expandir el campo $\mathbf{V} = V^i(x) \partial_i$. Sobre un punto en la curva, el vector tangente a la curva $\frac{d}{dt} = \frac{dx^i(t)}{dt} \partial_i$. $x^i(t)$ será una curva integral si se cumple la ecuación diferencial de ordinaria

$$\frac{dx^i(t)}{dt} = V^i(x(t)) \quad (5.13)$$

Dada una condición inicial $x^i(0) = x_0^i$, la teoría general de ecuaciones diferenciales ordinarias asegura la existencia y unicidad de la solución en un entorno suficientemente pequeño de x_0^i .

5.4.1.2 Flujo

Dado un campo vectorial $\mathbf{V} \in \mathcal{T}(M)$, el flujo asociado es la congruencia de curvas integrales del campo. La forma coordenada de un flujo es una aplicación σ

$$\sigma : \mathbb{R} \times M \rightarrow M \quad (5.14)$$

$$(t, x_0) \rightarrow \sigma^i(t, x_0) \quad (5.15)$$

tal que, para cada x_0 , $\sigma^i(t, x_0)$ son las coordenadas de una curva integral que pasa por x_0

$$\frac{d\sigma^i(t, x_0)}{dt} = V^i(t, x_0) \quad (5.16)$$

5.4.1.3 Mapa Exponencial

Dado un campo vectorial $\mathbf{V} \in \mathcal{T}(M)$, ¿existe alguna manera de reconstruir el flujo asociado $\sigma^i(t, x)$? Para cualquier curva $x^i(t)$, $f(t) = f(x^i(t))$ es una función sobre dicha curva. En una vecindad de un origen t_0 podemos expandir en serie de Taylor y obtener

$$f(t) = f(t_0) + t \left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t_0} + \frac{t^2}{2} \left. \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right|_{t_0} + \dots$$

Si $x^i(t)$ es una curva integral, verifica (5.13). Entonces

$$\left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t_0} = \left. \frac{dx^i(t)}{dt} \right|_{t_0} \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} \right|_{x=x(t_0)} \equiv \mathbf{V}[f] \Big|_{x(t_0)}$$

y podemos reescribir la serie de Taylor formalmente como

$$\begin{aligned} f(t) &= \left(1 + t\mathbf{V} + \frac{t^2}{2}\mathbf{V}^2 + \frac{t^3}{3!}\mathbf{V}^3 + \dots \right) f(x) \Big|_{x=x(t_0)} \\ &= e^{t\mathbf{V}} f(x) \Big|_{x=x(t_0)} \end{aligned} \quad (5.17)$$

Un caso particular se obtiene para cualquiera de las funciones coordenada $f(x) = x^i$. Entonces, dada la condición inicial $f(t_0) = x^i(t_0) = x_0$ la expansión anterior reconstruye la curva del flujo que pasa por este punto

$$x^i(t) = \sigma^i(t, x_0) = e^{t\mathbf{V}} x^i \Big|_{x=x_0} \quad (5.18)$$

Ejercicio 5.4.1 Sea $M = \mathbb{R}^2$, y $\mathbf{V} = -y\partial_x + x\partial_y$. Demostrar que las curvas integrales son circunferencias.

Ejercicio 5.4.2 Demostrar que la solución a (5.18) satisface la ecuación las curvas integrales de V

5.4.2. Flujo de Lie

5.4.2.1 Arrastre de Lie

Definamos $\sigma_t \equiv \sigma(t, \cdot)$ a t donde t está fijo.

$$\begin{aligned} \sigma_t : M &\rightarrow M \\ x^i &\rightarrow \sigma^i(t, x) = \sigma_t^i(x) \end{aligned} \quad (5.19)$$

σ_t es un difeomorfismo activo de M que mueve cada punto x^i a otro punto $x'^i = \sigma_t^i(x)$ una "distancia" t a lo largo del flujo integral del campo \mathbf{V} . Si consideramos ahora $t \in \mathbb{R}$, el conjunto de todos los σ_t forma un grupo conmutativo, isomorfo (localmente) al grupo aditivo de los reales \mathbb{R} .

$$(i) \sigma_t \cdot \sigma_s = \sigma_{t+s}$$

$$(ii) \sigma_0 = 1$$

$$(iii) \sigma_{-t} = \sigma^{-1}$$

5.4.2.2 Flujo de Lie

El difeomorfismo σ_t , asociado al flujo integral de un campo vectorial \mathbf{V} es una transformación activa que induce un movimiento en todos los objetos geométricos que podemos definir sobre M . Dicho movimiento recibe el nombre de *arrastre de Lie*.

5.4.2.3 Funciones

El arrastre de Lie de una función actúa sólo sobre el argumento. El valor de la nueva función $\phi'(x) \equiv (\sigma_t \phi)(x)$ en un punto x coincide con el de la antigua en el punto correspondiente a la preimagen de x , $\sigma_t^{-1}(x)$,

$$\begin{aligned} \sigma_t : \mathcal{F}(M) &\rightarrow \mathcal{F}(M) \\ \phi(x) &\rightarrow (\sigma_t \phi)(x) = \phi(\sigma_t^{-1}(x)) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Equivalentemente podemos escribir

$$(\sigma_t \phi)(\sigma_t(x)) = \phi(x)$$

5.4.2.4 Campos Vectoriales

Tomemos un campo vectorial $\mathbf{W} = W^i(x)\partial_i$. El arrastre de Lie de \mathbf{W} a lo largo de \mathbf{V} define un nuevo campo vectorial

$$\begin{aligned} \sigma_{t*} : \mathbf{W} &\rightarrow \mathbf{W} \\ \mathbf{W} &\rightarrow \sigma_{t*} \mathbf{W} \end{aligned} \quad (5.21)$$

dado, en coordenadas x^i , por la expresión

$$(\sigma_{t*} \mathbf{W})^i(x) = \frac{\partial \sigma^i(t, x)}{\partial x^j} W^j(\sigma_t^{-1}(x)) \quad (5.22)$$

5.4.3. Derivada de Lie

5.4.3.1 Flujo de Lie Infinitesimal

Sea $t = \epsilon \ll 1$. Entonces el difeomorfismo es infinitesimal y puede aproximarse por

$$\begin{aligned}
x^i \rightarrow x'^i &= \sigma_\epsilon^i(x) = \sigma^i(\epsilon, x) \\
&= \sigma^i(0, x) + \epsilon \left. \frac{d\sigma^i(t, x)}{dt} \right|_{t=0} + \dots \\
&= x^i + \epsilon V^i(x) + \dots
\end{aligned} \tag{5.23}$$

En conclusión, un difeomorfismo infinitesimal $\sigma_\epsilon(x)$ inducido por el flujo $\sigma(t, x)$ asociado a un campo vectorial \mathbf{V} , consiste en una *traslación de la coordenada x^i por una cantidad $\epsilon V^i(x)$*

5.4.3.2 Derivada de Lie de una función

La derivada de Lie de una función $f(x)$ con respecto a un campo vectorial \mathbf{V} se define a través del límite

$$\mathcal{L}_{\mathbf{V}}(\phi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (\phi - (\sigma_\epsilon \phi)) \tag{5.24}$$

Haciendo uso de (5.20) escribimos, en coordenadas x^i

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathbf{V}}(\phi)(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (\phi(x) - \phi(\sigma_\epsilon^{-1}x)) \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (\phi(x) - \phi(x - \epsilon V + \dots)) \\
&= V^i \frac{\partial}{\partial x^i} \phi(x) + \dots \\
&= \mathbf{V}[\phi](x)
\end{aligned} \tag{5.25}$$

donde hemos omitido términos de orden $\mathcal{O}(\epsilon^2)$. Por tanto, la derivada de Lie de una función coincide con la acción del campo vectorial sobre la función en cada punto.

5.4.3.3 Derivada de Lie de un campo vectorial

Análogamente, podemos definir el cociente incremental

$$\mathcal{L}_{\mathbf{V}} \mathbf{W} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (\mathbf{W} - \sigma_\epsilon^* \mathbf{W}) \tag{5.26}$$

En coordenadas

$$\begin{aligned}
(\sigma_{\epsilon^*} \mathbf{W})^i(x) &= \frac{\partial \sigma^i(\epsilon, x)}{\partial x^j} W^j(\sigma_\epsilon^{-1}(x)) \\
&= \frac{\partial(x^i + \epsilon V^i(x) + \dots)}{\partial x^j} W^j(x - \epsilon V + \dots) \\
&= (\delta^i_j + \epsilon \partial_j V^i(x) + \dots)(W^j(x) - \epsilon V^k \partial_k W^j + \dots) \\
&= W^i(x) + \epsilon (W^j \partial_j V^i - V^j \partial_j W^i)(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2)
\end{aligned} \tag{5.27}$$

por tanto

$$\mathcal{L}_{\mathbf{V}}[\mathbf{W}]^i(x) = (V^j \partial_j W^i - W^j \partial_j V^i)(x) \tag{5.28}$$

5.4.3.4 Corchete de Lie

Dados dos campos vectoriales \mathbf{V} y \mathbf{W} , se define el *corchete de Lie* $[\mathbf{V}, \mathbf{W}]$ como un nuevo campo vectorial \mathbf{Z} tal que, para toda función $f \in \mathcal{F}(M)$

$$\mathbf{Z}[f] = [\mathbf{V}, \mathbf{W}][f] = \mathbf{V}[\mathbf{W}[f]] - \mathbf{W}[\mathbf{V}[f]] \tag{5.29}$$

Mediante un simple cálculo en componentes se demuestra la siguiente identidad

$$\mathcal{L}_{\mathbf{V}}[\mathbf{W}] = [\mathbf{V}, \mathbf{W}] \tag{5.30}$$

Capítulo 6

Grupos: Definición y Propiedades

6.1. Definición de Grupo

Definición 6.1.1 Un grupo es un conjunto de elementos $\{g_1, g_2, \dots\}$ dotados de una ley de composición (multiplicación), que a cada par ordenado $g_i, g_j \in G$ le asigna otro elemento $g_i g_j$ de forma que se satisfacen las siguientes propiedades

G0. (cierre) La ley de composición es interna, es decir, si $g_i, g_j \in G$, entonces $g_i g_j \in G$.

G1. (asociatividad). Para todo $g_i, g_j, g_k \in G$

$$g_i(g_j g_k) = (g_i g_j)g_k. \quad (6.1)$$

G2. (elemento unidad). Existe un único elemento, denotado usualmente e , con la propiedad de que $\forall g_i \in G$

$$e g_i = g_i e = g_i. \quad (6.2)$$

G3. (elemento inverso). Para cada g_i existe un único elemento g_i^{-1} tal que

$$g_i^{-1} g_i = g_i g_i^{-1} = e. \quad (6.3)$$

6.1.0.5 Dado un grupo, podemos ampliarlo a un álgebra. Un álgebra es un conjunto de elementos que forman un espacio vectorial sobre un cuerpo (por ejemplo \mathbf{R} o \mathbf{C}), de forma que, junto a la adición se define una operación de multiplicación que verifica los postulados que definen un grupo, excepto que el cero del álgebra no tiene inverso. Así por ejemplo, dado un grupo G con elementos g_i ($i = 1, \dots, h$), las combinaciones lineales $\sum_{i=1}^h c_i g_i$, de elementos del grupo con coeficientes en el cuerpo, forman el álgebra del grupo. El producto se define por distributividad como

$$\left(\sum_{i=1}^h c_i g_i \right) \left(\sum_{j=1}^h c_j g_j \right) = \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^h c_i c_j g_i g_j \quad (6.4)$$

que por ser $g_i g_j$ un elemento del grupo, es un nuevo elemento del álgebra.

6.1.0.6 La multiplicación en general no es conmutativa; es decir, en general $g_i g_j \neq g_j g_i$. Decimos de un grupo que es abeliano cuando $g_i g_j = g_j g_i$ para todo par g_i, g_j .

6.1.0.7 El número de elementos de G se denomina orden de G , y se designa como $\mathcal{O}(G)$. Si el orden es un número finito, decimos que G es un grupo finito.

6.1.0.7 Ejemplos.

Vamos a enunciar algunos ejemplos a título ilustrativo, omitiendo otros así mismo importantes que serán objeto más adelante de un estudio detallado.

1. \mathbf{Q}_+ . El conjunto de todos los números reales estrictamente positivos. La ley de composición es la multiplicación ordinaria. Este grupo es abeliano y el orden es ∞ .
2. \mathbf{Z}_n . Enteros módulo n . Con ley de composición: la adición (mod n) tiene orden n y es abeliano.
3. S_n . Permutaciones de n objetos donde la multiplicación es la simple composición de permutaciones sucesivas. Este grupo es en general no abeliano, y su cardinalidad es n .
4. $GL(N, \mathbf{R})$. El grupo lineal, $GL(N, \mathbf{R})$ tiene por elementos todas las matrices de orden $N \times N$ con valores reales y determinante no nulo. Análogamente se define $GL(N, \mathbf{C})$, el grupo de matrices complejas.
5. \mathcal{F}_n . El grupo libre de n generadores. Consiste en “palabras” construidas con n generadores (“letras”) independientes x_1, \dots, x_n y sus inversos

$$\mathcal{F}_n = \{ x_{i_1}^{p_1} x_{i_2}^{p_2} \dots x_{i_m}^{p_m} \mid m \text{ entero no-negativo, } i_j \in \{1, \dots, n\}, p_j \in \mathbf{Z}, \quad (6.5)$$

$$x_{i_{j-1}} \neq x_{i_j} \neq x_{i_{j+1}} \} \quad (6.6)$$

Por ejemplo $x_2 x_1 x_2^3 \in \mathcal{F}_n$. Cuando $m = 0$ la palabra es el elemento identidad e . Dos palabras se “multiplican” escribiéndolas a continuación unas de otras, y combinando los exponentes cuando aparezcan “letras contiguas iguales. Por ejemplo, $(x_2 x_1^2 x_2 x_1^{-2})(x_1^2 x_2^{-2} x_1^{-2}) = x_2 x_1^2 x_2^{-1} x_1^{-2}$.

6.1.0.7 Contraejemplos.

Los axiomas de grupo son más restrictivos de lo que se pueda pensar a simple vista. Para ello enunciamos a continuación unos cuantos *contraejemplos*.

1. \mathbf{Z} .: Enteros con ley de composición la multiplicación numérica. Evidentemente el conjunto no contiene los inversos $1/n$ de todos los elementos (salvo $n = 1$).
2. \mathbf{R} .” Los números reales bajo multiplicación satisfacen todos los axiomas, excepto que el elemento 0 no tiene inverso. Sí es un grupo, sin embargo, con respecto a la adición.
3. \mathbf{Q}_- . Entre los racionales negativos, la multiplicación no es una operación interna.

6.2. La Estructura de los Grupos

6.2.1. Clases de Conjugación

6.2.1.1 Aunque, dados unos elementos g, g_1 y g_2 de un grupo, la igualdad $gg_1 = gg_2$ implica que $g_1 = g_2$ sin más que multiplicar por g^{-1} por la izquierda. Sin embargo, nada impide que $gg_1 = g_2g$ con $g_2 \neq g_1$. En este caso decimos que g_2 y g_1 son elementos conjugados mediante g . Multiplicando por la derecha por g^{-1} llegamos a la siguiente caracterización:

Definición 6.2.1 *Dos elementos g_1 y g_2 de un grupo G son conjugados si existe un tercer elemento g^{-1} tal que $g_2 = gg_1g^{-1}$. Decimos de g que es el elemento conjugante.*

6.2.1.2 En los casos en que se definen los elementos de un grupo como transformaciones lineales sobre un cierto espacio vectorial, la equivalencia bajo conjugación surge de la ambigüedad que existe a la hora de escoger la base de dicho espacio vectorial. Precisaremos este comentario en el capítulo siguiente, con un ejemplo explícito en el grupo S_n .

6.2.1.3 La relación de conjugación entre dos o más elementos, es una relación de equivalencia \sim . Efectivamente podemos verificar que se cumplen las propiedades

- (i) reflexiva $a \sim a$, en virtud de que $a = ea = ae$.
- (ii) simétrica $a = bg^{-1} \Rightarrow b = gag^{-1}$.
- (iii) transitiva $a = bg^{-1}$ y $b = hch^{-1} \Rightarrow a = (gh)c(gh)^{-1}$.

6.2.1.4 Dada una relación de equivalencia, la *clase de equivalencia* de un elemento a , escrita (a) , se define por:

$$(a) = \{b | b \sim a\}. \quad (6.7)$$

Podemos dar una expresión más constructiva, tomando un representante y conjugándolo mediante todos los elementos del grupo

$$(a) = \{b = gag^{-1} \quad \forall g \in G\} \quad (6.8)$$

De las propiedades de \sim se sigue que la subdivisión de un conjunto en clases de equivalencia es una *partición en subconjuntos disjuntos*. Efectivamente, todo elemento pertenece a alguna clase de equivalencia por la propiedad reflexiva, $a \sim a \Rightarrow (a) = \{a\}$. Además, dos clases de equivalencia son disjuntas o coinciden, ya que, supongamos que dos clases (a) y (b) tienen algún elemento c en común, entonces por transitividad $a \sim c$ y $b \sim c$ implica que $a \sim b$ por lo que $(a) = (b)$. Como sabemos que la propiedad de conjugación es una relación de equivalencia, todo grupo G admite una descomposición en *clases de conjugación*:

$$G = \cup_i (g_i) \quad (6.9)$$

6.2.1.5 Lógicamente el número de clases de conjugación es menor que el orden del grupo. Sólo en un grupo abeliano, cada elemento es a la vez toda una clase de conjugación puesto que $a = bg^{-1} = gg^{-1}b = b$.

6.2.2. Subgrupos

Definición 6.2.2 *Un subgrupo H de un grupo G es un subconjunto de G que a su vez forma un grupo bajo la misma ley de composición de G .*

6.2.2.1 Cuando G es finito, una definición equivalente afirma que H es un subgrupo de G cuando es cerrado (**G0**) bajo la ley de composición de G :

$$\forall h_1, h_2 \in H \subset G \Rightarrow h_1 h_2 \in H. \quad (6.10)$$

La asociatividad es una propiedad heredada de G , y la existencia de la identidad y del inverso en H se deducen de la propiedad de cierre y de la finitud de H . En efecto, si G es de orden finito, para cada elemento $h \in H$ existe un entero r tal que $h^r = h$. Por tanto $h^{r-1} = e$ y $h^{r-2} = h^{-1}$ como pretendíamos probar.

En todo grupo G hay dos ejemplos triviales, que son $H = \{e\}$ y $H = G$; Cualquier subgrupo que no sea (sí sea) $H = G$ se denomina subgrupo *propio (impropio)*.

6.2.3. Coset

6.2.3.1 Dados un elemento $g \in G$, y un subgrupo $H = \{h_1, h_2, \dots\}$, de un grupo G , el coset (por la izquierda) de g , se escribe gH y consiste en el conjunto de elementos obtenidos al multiplicar g por todos los elementos de H

$$gH \equiv \{gh_1, gh_2, \dots\}. \quad (6.11)$$

6.2.3.2 La pertenencia de dos elementos a un mismo coset define de nuevo una relación de equivalencia. Escribimos que

$$a \sim b \quad \text{si } b \in aH, \quad (6.12)$$

y verificamos las propiedades

- (i) (reflexiva) $a \in aH$ porque $a = ae$.
- (ii) (simétrica) $b \in aH \Rightarrow b = ah \Rightarrow a = bh^{-1} \Rightarrow a \in bH$.
- (iii) (transitiva) $b \in aH$ y $c \in aH \Rightarrow b = ah$ y $c = ah'$ así que $c = bh^{-1}h' = bh''$ i.e. $c \in bH$.

6.2.3.3 Espacio Cociente G/H

En consecuencia, los cosets son *clases de equivalencia* y, automáticamente, la división en cosets es una partición disjunta de G . Si G es un grupo finito podemos enumerar los cosets *distintos* en la forma $G/H = \{g_1H = eH, g_2H, \dots, g_sH\}$ por ejemplo.

6.2.3.4 Teorema de Lagrange

En un grupo finito G de orden $\mathcal{O}(G)$, cada coset gH contiene el mismo número de elementos r , que coincide con el orden $\mathcal{O}(H)$ del subgrupo H . Esto es evidente porque no es posible que $gh_1 = gh_2$ para $h_1 \neq h_2$. Como hemos visto que la relación que definen los cosets, produce una partición disjunta de G , todos los elementos de éste se agrupan en s cosets, todos del mismo orden $\mathcal{O}(H)$. Es decir

$$\mathcal{O}(G) = s\mathcal{O}(H). \quad (6.13)$$

Llegamos de esta manera al siguiente teorema: *en un grupo finito G el orden de cualquier subgrupo $H \subset G$ es un divisor del orden de G .*

6.2.4. Subgrupos Normales

Definición 6.2.3 *Un subgrupo normal, es un subgrupo H que verifica*

$$gHg^{-1} = H \quad \forall g \in G. \quad (6.14)$$

A los subgrupo normales también se les llama *auto-conjugados* debido a la propiedad 6.14.

Una definición alternativa es la de que los subgrupos normales están compuestos de *clases de conjugación completas*, ya que $\forall h \in H \Rightarrow ghg^{-1} = h' \in H$.

Otra forma de decir lo mismo es aquella según la cual un subgrupo normal tiene la propiedad de que sus *cosets por la izquierda y por la derecha coinciden*,

$$gH = Hg. \quad (6.15)$$

Por ejemplo, en un grupo abeliano, cada elemento es una clase de conjugación, por tanto cualquier subgrupo es automáticamente normal.

6.2.4.1 Grupo Simple

Decimos que un grupo es *simple* si no posee ningún subgrupo normal propio.

6.2.5. Grupo Cociente

Como ya sabemos, el conjunto coset G/H define una partición disjunta de G cuyos elementos (cosets) denotamos simbólicamente mediante un representante (g_iH) . Podemos preguntarnos si G/H es a su vez un grupo, y para ello debemos diseñar una operación interna que satisfaga los axiomas de grupo, $(g_1H)(g_2H) = (g_3H)$. Si empezamos probando con la simple multiplicación definida en G escribiremos $(g_1H)(g_2H) \sim g_1h_1g_2h_2 = g_3h_3$. Esta ecuación siempre tiene solución aunque en general no será $g_3 = g_1g_2$. Lo importante es que el producto de las clases sea independiente de los representantes escogidos. La situación se simplifica cuando H es un subgrupo normal, ya que entonces, de la propia definición se sigue

$$(g_1H)(g_2H) \sim g_1Hg_2H = g_1g_2H^2 = g_1g_2H = g_3H \sim (g_3H) \quad (6.16)$$

6.2.5.1 En conclusión, cuando H es un subgrupo normal, la regla de composición entre cosets es consistente y simplemente se reduce a $(g_1H)(g_2H) = (g_1g_2H)$. Además es sencillo verificar que todas las propiedades $G0, \dots, G3$ se heredan de las del propio grupo G . En consecuencia podemos concluir, que el conjunto de cosets $\{g_iH\}$ admite una estructura de grupo cuando H es un subgrupo normal. Llamamos a este grupo: grupo cociente G/H .

6.2.6. Producto Directo

Definición 6.2.4 Decimos que un grupo G es el producto directo de dos subgrupos A y B , $G = A \times B$, cuando

- (i) todos los elementos de A conmutan con todos los de B .
- (ii) todo elemento de G admite una expresión única en la forma $g = ab$, donde $a \in A$ y $b \in B$.

Esta definición se generaliza directamente al producto de n subgrupos $G = A \times B \times \dots \times J$.

6.2.6.1 De la propia definición se siguen algunas propiedades:

- el único elemento que tienen A y B en común es la identidad
- el producto de dos elementos $g_1 = a_1b_1$ y $g_2 = a_2b_2$ viene dado por

$$g_1g_2 = (a_1b_1)(a_2b_2) = a_1b_1a_2b_2 = a_1a_2b_1b_2 = (a_1a_2)(b_1b_2) \quad (6.17)$$

es decir la multiplicación separada de las componentes a y b entre sí.

- Los grupos A y B son subgrupo normales de G . Que son subgrupos es evidente entendiéndolo, por ejemplo, los elementos $a \in A$ como $ae_b \in G$ con e_b el elemento neutro de B . Por último estos subgrupos son normales porque para cualquier $g = ab \in G$

$$ga_i g^{-1} = aba_i b^{-1} a^{-1} = aa_i a^{-1} \in A, \forall a_i \in A. \quad (6.18)$$

- Los grupos cociente G/B y G/A son isomorfos a A y B respectivamente. Los elementos de G/B son cosets de la forma $\{a_1B, a_2B, \dots, a_rB\}$ y todos estos cosets son distintos ya que supongamos que $a_1b_1 = a_2b_2$, violaríamos el requisito (ii) de la definición de producto directo. Por último, además de ser 1:1 la aplicación $G/B \mapsto A$ tal que $a_iB \mapsto a_i$, es un homomorfismo, y esto se basa en la propiedad de subgrupo normal de B , que implica la ley de multiplicación $(a_1B)(a_2B) = a_1a_2B \mapsto a_1a_2$.

6.2.7. Centro de un Grupo

Definición 6.2.5 *El centro Z , de un grupo G se define como el subconjunto de elementos z , que conmutan con todos los elemento del grupo.*

$$Z = \{z \in G \mid zg = gz \ \forall g \in G\}. \quad (6.19)$$

6.2.7.1 Claramente es un subgrupo, como se demuestra fácilmente. Además, evidentemente Z es un subgrupo abeliano y, por tanto, un subgrupo normal, dado que cada elemento $z \in Z$ es una clase de conjugación completa, $z = gzg^{-1}$.

Capítulo 7

Grupos Finitos

Un grupo con un número finito de elementos se llama *grupo finito*; el número de elementos es el *orden* del grupo.

7.0.7.2 La forma más inmediata de representar un grupo finito consiste en mostrar su tabla de multiplicación, también llamada *cuadrado latino*. Por ejemplo el grupo cíclico C_3 es el conjunto de 3 elementos $\{e, b, c\}$ dotados de la tabla de multiplicación siguiente

	e	b	c
e	e	b	c
b	b	c	e
c	c	e	b

Es evidente que, de los axiomas, se sigue que no puede haber repetición de un mismo elemento en una misma fila ni columna. Supongamos que se produjese lo contrario, es decir que en una cierta tabla encontrásemos que por un lado $gg_2 = g_4$ y, por otro, $gg_3 = g_4$ también. Por la unicidad del inverso podemos multiplicar por g^{-1} por la izquierda y obtener que $g_2 = g_3 = g^{-1}g_4$. Sin embargo no toda tabla que satisfaga este requisito corresponde a un grupo finito, y la propiedad de asociatividad ha de verificarse separadamente.

7.0.7.3 Aunque precisa, la forma anterior de caracterizar un grupo es engorrosa para grupos finitos de orden alto. Otra manera comunmente utilizada para determinar un grupo finito consiste en especificar su *presentación*. Una presentación viene dada por un conjunto de generadores y un conjunto de relaciones entre ellos. Por ejemplo, la presentación de un grupo abeliano deberá incluir una identificación de elementos $ab = ba$ para cualesquiera a, b .

Teorema 7.0.1 *Cualquier grupo finito G , puede ser presentado como un grupo \mathcal{F}_n libre, módulo ciertas relaciones de la forma $R_1(x_1, \dots, x_n) = \dots = R_p(x_1, \dots, x_n) = e$. En este caso escribimos*

$$G = | \{x_1, x_2, \dots, x_n\}; R_1(x_1, \dots, x_n) = \dots = R_p(x_1, \dots, x_n) = e |. \quad (7.1)$$

No vamos a dar una prueba de este teorema pero lo ilustraremos con algunos ejemplos.

7.1. El Grupo Cíclico C_n

Definición 7.1.1 C_n es el grupo de transformaciones de simetría de un polígono regular con n lados y direccionado.

Por “direccionado.” entendemos que el polígono lleva asociado un sentido de recorrido alrededor de su perímetro. Los elementos del grupo son rotaciones discretas de ángulo $2\pi r/n$ ($r = 0, 1, 2, \dots, n-1$), alrededor de un eje de rotación que atraviesa el centro de gravedad del polígono en sentido perpendicular al plano de la figura.

7.1.0.4 Presentación de C_n

Llamando a estos elementos c_n^r , es evidente que podemos obtener este elemento a partir de una rotación elemental $c_n^1 \equiv c$, es decir

$$c_n^r = c^r. \quad (7.2)$$

En principio, el grupo está generado por potencias arbitrariamente altas de esta operación elemental, c . Sin embargo, notemos que el grupo es finito debido a que una rotación de ángulo 2π es equivalente a la identidad

$$c^n = e \quad (7.3)$$

Podemos por tanto definir matemáticamente el grupo cíclico de orden n como el grupo de elementos generados por c , consistente en elementos $\{e, c, c^2, \dots, c^{n-1}\}$. Su presentación es la más sencilla

$$C_n = | \{e, c\} ; c^n = e. | \quad (7.4)$$

7.1.0.5 Obviamente se trata de un grupo Abeliano, ya que

$$c^r c^s = c^{r+s} = c^{s+r} = c^s c^r, \quad (7.5)$$

y de hecho es isomorfo al grupo \mathbf{Z}_n , del ejemplo 2 más arriba. La correspondencia es 1 : 1 de la forma

$$c^r \in C_n \leftrightarrow r \in \mathbf{Z}_n. \quad (7.6)$$

y esta correspondencia es un homomorfismo, es decir preserva las operaciones respectivas en ambos conjuntos.

Como sabemos, al tratarse de un grupo abeliano, cada elemento constituye por sí mismo una clase de conjugación.

7.1.0.6 El grupo C_6 nos brinda la oportunidad de dar un ejemplo de producto directo de subgrupos, $C_6 = A \times B$ donde

$$\begin{aligned} A : \quad & \{e, c^2, c^4\} \sim C_3 \\ B : \quad & \{e, c^3\} \sim C_2. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Todo elemento de C_6 se escribe en forma única como un producto de elementos de A y de B , que por ser abelianos, son normales. Por tanto C_6 no es simple.

7.2. El Grupo Dihédrico D_n

:

Definición 7.2.1 D_n es el grupo de transformaciones de simetría de un polígono regular, no direccionado, con n lados.

Vamos a estudiar en detalle D_3 y D_4 , y a partir de este estudio veremos cómo es fácil generalizar a D_n .

7.2.1. El grupo D_3

7.2.1.1 Este grupo contiene obviamente los elementos $\{e, c, c^2\}$ del grupo cíclico C_3 . Ahora, al no tener que preservar ninguna direccionalidad, encontramos tres nuevas operaciones de simetría en los giros de 180 grados en torno a los ejes Ox , Oy y Oz . Llamamos a estas operaciones, x , y y z respectivamente. Estas operaciones satisfacen $x^2 = y^2 = z^2 = e$, es decir son elementos de C_2 , rotaciones de orden 2.

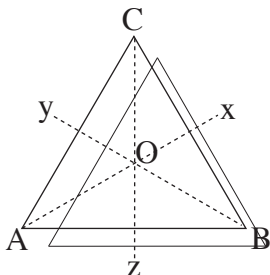


Figura 7.1: Triángulo equilátero sin direccionar, sobre el que actúan los elementos del grupo D_3

Vamos a intentar encontrar una presentación de este grupo. Para ello observemos que si seleccionamos los elementos c y x se verifican las siguientes identidades

$$y = xc \quad (7.8)$$

$$z = xc^2 = xc^{-1} \quad (7.9)$$

Concretamente, en forma canónica los elementos son

$$D_3 = \{e, c, c^2, x, xc, xc^2\}. \quad (7.10)$$

7.2.1.2 Presentación de D_3

Podemos afirmar por tanto que el grupo D_3 está generado por los elementos c y x solamente, puesto que todos los demás pueden obtenerse a partir de estos. Intentaríamos escribir una presentación como sigue

$$D_3 = | \{c, x\}; c^3 = x^2 = e | \quad (7.11)$$

Podemos ver que cualquier elemento escrito en forma canónica $x^m c^n$ puede ser identificado mediante estas relaciones. Efectivamente, sea por ejemplo $x^5 c^8$; efectuando las reducciones módulo 2 y módulo 3 sobre los exponentes de x y c respectivamente llegamos a la expresión equivalente $xc^2 = xc^{-1} = z$. Para tratar expresiones en las que aparecen c a la izquierda de x , por ejemplo $cx^5 c^6$ debemos encontrar una relación que permita pasar a la forma canónica. Partiendo de $y^2 = (xc)^2 = xcxc = e$ podemos multiplicar por x por la izquierda y por c^2 por la derecha para encontrar

$$cx = xc^2 \quad (7.12)$$

Analizando de esta manera la conjugación de x mediante c o c^{-1} encontramos otra representación para y y z .

$$y = xc = cxc^{-1} \quad (7.13)$$

$$z = xc^2 = xc^5 = c^2 xc = c^{-1} xc. \quad (7.14)$$

Finalmente podemos escribir que D_3 es el grupo generado por dos elementos x y c con las relaciones siguientes

$$D_3 = | \{c, x\} ; c^3 = x^2 = (xc)^2 = e | \quad (7.15)$$

7.2.1.3 Clases de conjugación

Las clases de conjugación de D_3 son fáciles de hallar.

- (e) esto siempre es así porque $geg^{-1} = e$.
- (c, c^2) al conjugar por x las 2 x 's se aniquilan, $xcx^{-1} = xcx = x^2c^2 = c^2$.
- (x, xc, xc^2) (x, y, z) ya que al conjugar por c ó x siempre sobrevive una x .

7.2.1.4 Subgrupos

Por lo que respecta a los subgrupos, claramente D_3 tiene un subgrupo isomorfo a C_3 , $\{e, c, c^2\}$, y 3 subgrupos isomorfos a C_2 , $\{e, x\}$, $\{e, y\}$, $\{e, z\}$.

Mencionemos que $C_2 = \{e, x\}$ no es un subgrupo normal ya que la clase de conjugación de x contiene $\{x, xc, xc^2\}$. Por el contrario, $C_3 = \{e, c, c^2\}$, al ser abeliano, sí es normal, como hemos visto en la sección anterior.

7.2.1.5 Cosets

Si tomamos $H = \{e, x\}$ encontramos la siguiente partición en cosets

$$\begin{aligned} eH &= H &&= \{e, x\} \\ cH &= \{c, cx\} &= \{c, xc^2\} &= \{c, z\} \\ c^2H &= \{c^2, c^2x\} &= \{c^2, xc\} &= \{c^2, y\} \end{aligned} \quad (7.16)$$

El representante que tomemos de cada coset es irrelevante como el lector puede comprobar, y es igual escribir eH que xH , ó cH que zH , ó c^2H que yH .

Ejercicio 7.2.1 Verifica que cuando $H = \{e, c, c^2\}$ el conjunto G/H forma un grupo cociente isomorfo al subgrupo $\{e, x\}$. Comprobar que, por el contrario, cuando $H = \{e, x\}$, G/H no es un grupo.

7.2.2. El grupo D_4

7.2.2.1 En este caso c es una rotación elemental de 90 grados, y por tanto satisface $c^4 = e$. Ahora vemos que, al igual que en el caso anterior tenemos simetrías adicionales en las rotaciones de 180 grados alrededor de 4 posibles ejes: x alrededor de Ox , y alrededor de Oy , a alrededor de OD y d alrededor de OA . De nuevo, todo el grupo puede ser generado por dos operaciones fundamentales $\{c, x\}$ con $c^4 = x^2 = e$.

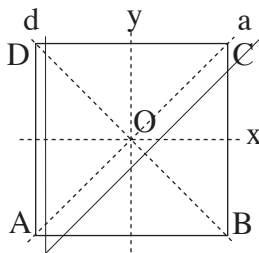


Figura 7.2: Cuadrado sin direccionar, sobre el que actúan los elementos del grupo D_4

7.2.2.2 Para ver qué elementos surgen del producto mixto $x^m c^n$ no queda otra alternativa que calcularlos. Obtenemos así la tabla siguiente:

$$d = xc \quad (7.17)$$

$$y = xc^2 \quad (7.18)$$

$$a = xc^3 \quad (7.19)$$

$$(7.20)$$

La relación adicional es simplemente $a^2 = (xc)^2 = e$ y, nuevamente, multiplicando por x por la izquierda y por c^3 por la derecha encontramos

$$cx = xc^3 \quad (7.21)$$

En particular esto permite identificar los elementos conjugados por c . Por ejemplo $cx c^{-1} = xc^2 = y$, $cdc^{-1} = xc^2 = xc = a$ como es natural, del hecho de que los ejes asociados son los relacionados por c . Tenemos por tanto que

$$D_4 = | \{e, c, x\} ; c^4 = x^2 = (xc)^2 = e |. \quad (7.22)$$

7.2.3. El grupo D_n

7.2.3.1 La generalización debería estar ahora clara. El grupo D_n es el conjunto de simetrías de un polígono regular de n lados, y está generado por una rotación de orden n alrededor de un eje perpendicular al plano del polígono, y por una cualquiera de las n rotaciones binarias en torno a cualquier eje de simetría en el propio plano y su presentación es la siguiente.

$$D_n = | \{c, x\} ; c^n = x^2 = (xc)^2 = e |. \quad (7.23)$$

7.2.3.2 Con respecto los subgrupos, la estructura es similar, y tenemos un subgrupo isomorfo a $C_n, \{e, c, \dots, c^{n-1}\}$, y n subgrupos binarios isomorfos a $C_2, \{e, x\}, \{e, xc\}, \dots, \{e, xc^{n-1}\}$. Solamente el primero de ellos constituye un subgrupo normal.

Ejercicio 7.2.2 (i) Halla las clases de conjugación de D_n .

(ii) ¿Cuál es la estructura del grupo cociente D_n/C_n ? ¿Es $D_n = (D_n/C_n) \times C_n$?

7.3. El Grupo Simétrico S_n .

Los elementos de S_n son las posibles permutaciones o sustituciones de n elementos, o de los índices que los etiquetan, y contiene por tanto $n!$ elementos. La multiplicación es la simple aplicación sucesiva, con lo que el axioma de asociatividad se satisface trivialmente. El orden de S_n es evidentemente $n!$

Un elemento genérico se puede escribir en la forma *canónica*

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p(1) & p(2) & \dots & p(n) \end{pmatrix}. \quad (7.24)$$

e indica que el índice i es cambiado por el índice $p(i)$. Esta notación tiene la ventaja de que el orden de las columnas es irrelevante, siendo importante sólo el emparejamiento vertical de elementos.

7.3.0.3 Para encontrar la composición de dos permutaciones basta con seguir la pista a cada índice. Por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \quad (7.25)$$

Claramente este producto no es conmutativo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.26)$$

En particular el inverso del elemento 7.24 se escribe

$$p^{-1} = \begin{pmatrix} p(1) & p(2) & \dots & p(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}. \quad (7.27)$$

7.3.1. Notación de Ciclos

Una notación muy utilizada para los elementos de S_n es la llamada descomposición en *ciclos*. Por ejemplo, es evidente que en la sustitución

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad (7.28)$$

los elementos primero, segundo y tercero se permutan entre sí cíclicamente $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$, y así también lo hacen los elementos cuarto y quinto. Esto quiere decir que nuestra permutación se descompone en un ciclo de tres y otro de dos y por tanto escribimos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \equiv (123)(45) \quad (7.29)$$

Otro ejemplo puede ser

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad (7.30)$$

donde vemos que encontramos de nuevo un ciclo de tres elementos $2 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 2$, y dos ciclos de un sólo elemento. Por tanto podemos escribir igualmente $(1)(253)(4)$.

Ejercicio 7.3.1 *Escribir el resultado de las siguientes permutaciones en la forma canónica:*

$$(634)(1257) = \quad (7.31)$$

$$(643)(1527) = \quad (7.32)$$

$$(6)(157)(234) = \quad (7.33)$$

7.3.1.1

Elementos de S_n pueden ser multiplicados en la notación de ciclos. Aunque parezca tener mayor dificultad, un par de observaciones allanan la tarea por este camino:

- (i) dos ciclos son el mismo si coinciden salvo permutación cíclica de sus elementos.
- (ii) ciclos de un elemento pueden ser omitidos,
- (iii) ciclos disjuntos conmutan entre sí,
- (iv) ciclos que tengan un sólo elemento en común simplemente se encadenan (por ejemplo, $(253)(45) = (325)(54) = (3254)$).

Con un poco de práctica pueden encontrarse otras reglas útiles.

7.3.1.2 Con ayuda de estas reglas, el producto de los dos ejemplos 7.28 y 7.30

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1543)(2) \quad (7.34)$$

puede realizarse en la forma equivalente

$$\begin{aligned} (1)(253)(4)(123)(45) &= (253)(123)(45) \\ &= (325)(54)(123) \\ &= (2543)(312) \\ &= (2543)(31)(12) \\ &= (25431)(12) \\ &= (5431)(12)(12) \\ &= (1543)(2) \end{aligned}$$

7.3.1.3 Ejemplos: S_3 y S_4

Independientemente de la forma que se considere más adecuada, el punto es que todo elemento de S_n puede escribirse en forma de un producto de ciclos disjuntos. En consecuencia, el orden en que escribamos dichos ciclos es irrelevante. La información sobre los ciclos de 1 elemento es superflua: como hemos visto, y por eso es conveniente omitirlos.

Este nuevo sistema nos permite enumerar de forma sistemática los elementos y clases de conjugación de S_n . S_3 es de orden 6. Consiste en la identidad, 3 2–ciclos y 2 3–ciclos:

$$S_3 = \{(); (12), (13), (23); (123), (132)\} \quad (7.35)$$

S_4 por su parte adopta el siguiente aspecto:

$$\begin{aligned} S_4 = \{ & (); (12), (13), (14), (23), (24), (34); \\ & (12)(34), (13)(24), (14)(23); \\ & (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243); \\ & (1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432) \} \end{aligned} \quad (7.36)$$

7.3.2. Teorema de Cayley

La importancia del grupo simétrico S_n dentro del contexto de la Teoría de Grupos finitos viene esclarecida con precisión por el siguiente teorema.

Teorema 7.3.1 (Teorema de Cayley:) *Todo grupo G finito de orden n , es isomorfo a algún subgrupo de S_n .*

Demostración: Notar que necesariamente ha de ser un subgrupo pues el orden es menor a partir de $n = 3$. La prueba consiste en asociar biunívocamente cada elemento g de G , con un elemento $\Pi(g)$ de S_n , de forma que esta relación sea un homomorfismo. Escribiendo los elementos de G en un cierto orden escogido, $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ la propiedad de cierre y la condición de orden finito, implican que al multiplicar esta serie por un elemento arbitrario g por la derecha, necesariamente se produce una permutación de la forma

$$\{ga_1, ga_2, \dots, ga_n\} = \{a_{\pi_1}, a_{\pi_2}, \dots, a_{\pi_n}\}. \quad (7.37)$$

y por tanto el elemento $\Pi(g) \in S_n$ asociado a $g \in G$ es simplemente

$$g \rightarrow \Pi(g) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_n \end{pmatrix}. \quad (7.38)$$

Todo elemento tiene una imagen, y por tanto la aplicación es suprayectiva; además es inyectiva, es decir un mismo $\Pi(g)$ no puede provenir de dos elementos distintos, porque si $ga_i = g'a_i, \forall a_i$, entonces multiplicando por la derecha por a_i^{-1} llegamos a que $g = g'$. Por último es un homomorfismo, es decir, *respeto la ley de grupo* en ambos espacios. Así si $g_1 \leftrightarrow \Pi(g_1)$ y $g_2 \leftrightarrow \Pi(g_2)$ entonces por aplicación sucesiva es evidente que $g_1g_2 \leftrightarrow \Pi(g_1)\Pi(g_2)$. El conjunto de los $\Pi(g)$ así obtenidos es un subconjunto de S_n que cierra entre sí bajo la ley del grupo. Como sabemos ya, esto significa que forman un subgrupo, y el teorema queda demostrado ■

7.3.2.1 $D_3 \sim S_3$

Particularizando para el grupo D_3 , su notación de ciclos así como su isomorfismo con S_3 viene clarificado por la siguiente tabla

$$\begin{array}{ccc} \{(); & (23), (31), (12); & (123), (132)\} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \{e; & x, xc, xc^2; & c, c^2\} \end{array} \quad (7.39)$$

El orden de un elemento es fácil de hallar en esta notación puesto que un ciclo de longitud r tiene orden r (probar).

7.3.3. Clases de Conjugación de S_n

Ya hemos visto la definición de conjugación anteriormente y hemos mostrado cómo la relación de conjugación entre dos o más elementos es una relación de equivalencia ' \sim '.

Para analizar la clase de conjugación de un elemento $p \in S_n$ dado, debemos estudiar qué tienen en común todos los elementos que se generan en la forma sps^{-1} con s arbitrario:

$$\begin{aligned} sps^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ s(1) & s(2) & \dots & s(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p(1) & p(2) & \dots & p(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s(1) & s(2) & \dots & s(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ s(1) & s(2) & \dots & s(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s(1) & s(2) & \dots & s(n) \\ p(1) & p(2) & \dots & p(n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p(1) & p(2) & \dots & p(n) \\ s(p(1)) & s(p(2)) & \dots & s(p(n)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s(1) & s(2) & \dots & s(n) \\ p(1) & p(2) & \dots & p(n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s(1) & s(2) & \dots & s(n) \\ sp(1) & sp(2) & \dots & sp(n) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Usando la notación de ciclos, si

$$p = (p_1 \dots p_{k_1})(p_{k_1+1} \dots p_{k_2}) \dots (p_{k_r} \dots p_n) \quad (7.40)$$

Vemos que para obtener sps^{-1} debemos aplicar la permutación s tanto a la fila de arriba como a la de abajo de p . Por ejemplo

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}; s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}; sps^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}. \quad (7.41)$$

Este procedimiento opera de igual manera en la notación de ciclos:

$$p = (12)(345); s = (13524) \Rightarrow sps^{-1} = (34)(512) \quad (7.42)$$

y en el caso general

$$\begin{aligned} sps^{-1} &= (s(p_1)\dots s(p_{k_1}))(s(p_{k_1+1})\dots s(p_{k_2}))\dots(s(p_{k_r})\dots s(p_n)) \\ &= (s_1\dots s_{k_1})(s_{k_1+1}\dots s_{k_2})\dots(s_{k_r}\dots s_n). \end{aligned}$$

Es decir, la conjugación preserva la estructura de ciclos. Dicho de otro modo *las clases de conjugación se componen de todos aquellos elementos que comparten la misma estructura de ciclos.*

7.3.3.1 Por tanto existen tantas clases de conjugación como formas de dividir un elemento en ciclos, o equivalentemente, de dividir el entero n en particiones. Es decir, una permutación genérica puede escribirse en la forma

$$p = (a_1 a_2 \dots a_{l_1})(b_1 b_2 \dots b_{l_2})(c_1 c_2 \dots c_{l_3}) \dots \quad (7.43)$$

donde los ciclos han sido ordenados de forma que $1 \leq l_1 \leq l_2 \leq l_3 \dots$ pero ha de cumplirse que $l_1 + l_2 + l_3 \dots = n$, (advieftase que hemos de incluir los 1-ciclos explícitamente). Escrito en esta forma, la única información relevante está en los números l_i que expresan la longitud de los ciclos. Si todos ellos son diferentes escribimos $l_1 l_2 \dots l_r$. Sin embargo, en general la longitud de algunos ciclos coincidirá. En este caso anotamos las longitudes distintas l_i y el número de veces que aparece p_i ; escribimos entonces la partición en la forma $l_1^{p_1} l_2^{p_2} \dots l_r^{p_r}$. Por ejemplo para S_3 tenemos

Partición	Clase de Conjugación	Elementos de S_3
1^3	$(\cdot)(\cdot)(\cdot)$	$() = e$
$1 \cdot 2$	$(\cdot)(\cdot\cdot)$	$(23), (13), (12)$
3	$(\cdot\cdot\cdot)$	$(123), (132)$

7.3.3.2 El número de particiones $\pi_n = \overline{\{(l_1, \dots, l_n)\}}$ con $1 \leq l_1 \leq l_2 \leq l_3 \dots$ y tal que $l_1 + l_2 + l_3 \dots = n$ no posee una expresión analítica. Sin embargo sí tiene una función generadora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n x^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^n}. \quad (7.44)$$

Ejercicio 7.3.2 Calcular π_5 y verificarlo construyendo las particiones de cinco elementos.

7.3.4. El Grupo Alternante A_n

7.3.4.1 Este es un subgrupo de S_n que se compone de exclusivamente de permutaciones pares. Toda permutación puede descomponerse en multiplicación de ciclos elementales de dos elementos (2-ciclos):

$$(n_1 n_2 n_3 \dots n_r) = (n_1 n_2)(n_2 n_3) \dots (n_{r-1} n_r). \quad (7.45)$$

7.3.4.2 Podemos definir una *paridad* asociada a toda permutación p , en la forma $\pi(p) = (-1)^n$, donde n es el número de 2-ciclos elementales que resultan de descomponer totalmente p . Tomando el convenio $\pi(e) = +1$, vemos que la composición de elementos pares de S_n , (con $\pi = +1$) cierra entre sí (no así los impares). Denominamos este subgrupo, el grupo alternante de n elementos, A_n .

Ejercicio 7.3.3 Mostrar que A_n es un subgrupo normal de S_n . Construir el espacio coset S_n/A_n y por tanto deducir que A_n es de orden $(\frac{1}{2}n!)$. ¿Cuál es la estructura del grupo S_n/A_n ?

Capítulo 8

Representaciones

8.1. Homomorfismos

Un homomorfismo es una aplicación f de un conjunto A en otro B (escribimos $f : A \mapsto B$) que preserva alguna estructura interna. En particular estamos interesados en la estructura de grupo cada grupo A y B están dotados de una ley de multiplicación.

Definición 8.1.1 sean A y B dos grupos, y $f : A \rightarrow B$ una aplicación. Decimos que f es un homomorfismo cuando verifica que para cualesquiera $a_1, a_2 \in A$

$$f(a_1 a_2) = f(a_1) f(a_2). \quad (8.1)$$

8.1.0.3 Cuando B coincide con A , decimos que f es un *endomorfismo*. Recordemos como se definen la imagen $\text{Im} f$ y el núcleo $\text{Ker} f$ de una aplicación:

$$\begin{aligned} \text{Im} f &:= \{b \in B \mid b = f(a) \text{ para algún } a \in A\} \\ \text{Ker} f &:= \{a \in A \mid f(a) = e_B \in B\} \end{aligned} \quad (8.2)$$

Ejercicio 8.1.1 Demostrar que tanto $\text{Im} f$ como $\text{Ker} f$ son subgrupos de B y A respectivamente. Comprobar que, de hecho, $\text{Ker} f$ es un subgrupo normal.

8.1.0.4 Una aplicación *inyectiva* es aquella para la cuál el núcleo $\text{Ker} f = e_A$. Si además $\text{Im} f = B$, f es *suprayectiva* y decimos que es *biyectiva*, o aplicación 1:1. Si además f es un homomorfismo ((8.1)) decimos que constituye un *isomorfismo*. Un isomorfismo $f : A \rightarrow A$, de un grupo en sí mismo se llama un *automorfismo*.

8.2. Representaciones de Grupos

Definición 8.2.1 Una *representación n -dimensional*, es un homomorfismo del grupo en cuestión, G , sobre el grupo de automorfismos lineales de un espacio vectorial abstracto V de dimensión n .

A cada elemento $g \in G$, este homomorfismo le asocia, por tanto, un automorfismo lineal $D(g)$. En otras palabras, se trata de una aplicación $g \rightarrow \mathbf{D}(g)$ que preserve la estructura de grupo en el sentido de que

$$\mathbf{D}(g_1 g_2) = \mathbf{D}(g_1) \mathbf{D}(g_2) \quad (8.3)$$

donde en el miembro derecho el producto indica la multiplicación matricial. En virtud de la definición de homomorfismo tenemos que $\mathbf{D}(g^{-1}) = \mathbf{D}^{-1}(g)$.

8.2.0.5 Representación fiel

Decimos de una representación, que es *fiel* si la aplicación es un homomorfismo inyectivo. Es decir, si a cada elemento distinto g le corresponde un operador distinto $\mathbf{D}(g)$. En particular este hecho impone que $\text{Ker } D = e \in G$, de donde se deduce que el único elemento representado por la matriz unidad es el elemento identidad del grupo G .

8.2.0.6 Forma matricial de una representación

Dada una base, $|\mathbf{e}_i\rangle$ de V , un operador es equivalente a una matriz

$$\mathbf{D}(g)|\mathbf{e}_i\rangle = D^j_i(g)|\mathbf{e}_j\rangle, \quad (8.4)$$

Es frecuente confundir \mathbf{D} y su expresión D^i_j obviando la necesidad de escoger una base, y denominar a $D^i_j(g)$ la representación del elemento g . Otra representación $D^{i'}_{j'}(g)$ será equivalente a $D^i_j(g)$ si ambas se relacionan mediante la relación de cambio de base

$$|\mathbf{e}_{j'}\rangle = O^j_{j'}|\mathbf{e}_j\rangle \quad \Leftrightarrow \quad D^{i'}_{j'}(g) = O^{-1i'}_i D^i_j(g) O^{j'}_j \quad (8.5)$$

Por tanto, cuando hablemos de una matriz $D^i_j(g)$ como la representación de un elemento $g \in G$, debemos entender a la vez todas las equivalentes a ella. De esta manera estaremos realmente refiriéndonos al operador abstracto $\mathbf{D}(g)$.

Ejemplos:

8.2.0.7 Todo grupo admite una representación trivial unidimensional, en la que todo elemento viene representado por el número 1. Por supuesto dicha representación no es fiel.

8.2.0.8 En el caso de C_3 podemos suponer que el triángulo orientado que queremos rotar está contenido en el plano ($x, y, z = 0$). Entonces una rotación genérica alrededor del eje z se escribe como una matriz

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta & 0 \\ \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.6)$$

Particularizando para los valores del ángulo $0, 2\pi/3$ y $4\pi/3$ obtenemos las matrices

$$\begin{aligned} D(e) = R(0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ D(c) = R(2\pi/3) &= \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ D(c^2) = R(4\pi/3) &= \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8.7)$$

El lector puede verificar que se cumple $D(c^2) = (D(c))^2$ y $(D(c))^3 = D^V(e)$, como corresponde a una representación del grupo C_3 .

Ejercicio 8.2.1 Construye la representación del grupo dihédrico D_3 añadiendo la matriz que representa a x y verificando las reglas que se especifican en la presentación de D_3 (7.15)

8.2.0.9 G -módulo

El espacio vectorial V sobre el que actúa un grupo G de esta manera se conoce como un G -módulo. En adelante supondremos el G -módulo V es un espacio vectorial dotado de algún producto escalar hermitico $(\cdot, \cdot) : V \times V \in \mathbb{C}$. Recuérdese que si la base $|\mathbf{e}_i\rangle$ no es ortonormal con respecto a dicho producto escalar, entonces se debe hacer una distinción entre las matrices D^j_i definidas en (8.4), y $D_{ji} \equiv \langle \mathbf{e}_j | \mathbf{D} \mathbf{e}_i \rangle$.

8.3. Reducibilidad

En el ejemplo de C_3 hemos encontrado una representación que presentaba la forma genérica

$$D(c) = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ etc.} \quad (8.8)$$

Esta forma diagonal en bloques tiene su origen en el hecho de que el eje z permanece invariante. Es decir, por cuanto se refiere a las transformaciones consideradas, el espacio vectorial $|\mathbf{x}\rangle = x^1|\mathbf{e}_1\rangle + x^2|\mathbf{e}_2\rangle + x^3|\mathbf{e}_3\rangle$ se descompone en dos subespacios desacoplados $|\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{u}\rangle + |\mathbf{v}\rangle$ con $|\mathbf{u}\rangle = x^1|\mathbf{e}_1\rangle + x^2|\mathbf{e}_2\rangle$ y $|\mathbf{v}\rangle = x^3|\mathbf{e}_3\rangle$. Por tanto, la representación anterior se descompone de forma efectiva en dos representaciones separadas, una 2-dimensional $D^{(2)}$, actuando sobre $|\mathbf{u}\rangle$, y otra, la trivial $D^{(1)} = 1$ actuando sobre $|\mathbf{v}\rangle$, y que son totalmente independientes

$$D(g)D(g') = \begin{pmatrix} A(g) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(g') & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(g)A(g') & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.9)$$

8.3.0.10 Representación reducible

Una representación $\mathbf{D} : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ es reducible si podemos descomponer $V = V_1 + V_2$ donde $V_1 \in V$ es un G -submódulo invariante. Dicho de otra manera, si para todo $g \in G$, $|\mathbf{v}\rangle \in V_1 \Rightarrow \mathbf{D}(g)|\mathbf{v}\rangle \in V_1 \quad \forall |\mathbf{v}\rangle$.

Veamos la expresión que adopta la matriz $D^i_j(g)$ en una base adaptada $\{|\mathbf{e}_1\rangle \dots |\mathbf{e}_n\rangle\} \in V_1$. Claramente la acción de $\mathbf{D}(g)$ sobre estos elementos de la base sólo puede ser una combinación lineal de ellos mismos. Por tanto $\mathbf{D}|\mathbf{e}_j\rangle = D^i_j(g)|\mathbf{e}_i\rangle = 0$ para $j = 1, \dots, n$, y $i = n+1, \dots, d$.

Podemos expresar este hecho en forma del siguiente lema

Lema 8.3.1 *Si una representación de dimension $n+m$ es reducible, existe alguna base en la que $D^i_j(g)$ adopta la forma en bloques siguiente*

$$D(g) = \begin{pmatrix} A(g) & C(g) \\ 0 & B(g) \end{pmatrix} \quad \forall g \in G \quad (8.10)$$

donde $A(g)$ y $B(g)$ son matrices cuadradas de dimensiones $n \times n$ y $m \times m$ respectivamente.

Multiplicando dos matrices del tipo (8.10) llegamos al resultado de que $D(g)D(g') = D(gg')$ con

$$A(gg') = A(g)A(g') \quad (8.11)$$

$$B(gg') = B(g)B(g') \quad (8.12)$$

$$C(gg') = A(g)C(g') + C(g)B(g'). \quad (8.13)$$

Por tanto, dada la forma en bloques (8.10), automáticamente $\{A(g)\}$ y $\{B(g)\}$ constituyen representaciones de G , n - y m -dimensionales respectivamente

Viceversa, dadas dos representaciones A y B siempre podemos formar una mayor mediante la suma directa

$$D(g)^i_j = \begin{pmatrix} A(g) & 0 \\ 0 & B(g) \end{pmatrix} \quad (8.14)$$

y, en este caso, escribimos $D = A \oplus B$, siendo la dimensión de D , la suma de las de A y B .

Una representación $\mathbf{D} : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ es completamente reducible si podemos descomponer $V = V_1 + V_2$ donde V_1 y V_2 son G -submódulos invariantes. Escribimos $\mathbf{D} = \mathbf{D}^{(1)} \oplus \mathbf{D}^{(2)}$ donde $\mathbf{D}^{(i)}$ es la restricción de \mathbf{D} al subespacio V_i .

Podemos generalizar el argumento que condujo a (8.10) al caso presente. Entonces vemos que necesariamente los elementos de matrix D^i_j nulos son los que hacen que dicha matriz tenga una apariencia diagonal por cajas:

8.3.0.11 Representación irreducible

Una representación irreducible es una representación que no es reducible. Por tanto, si $\mathbf{D}(g)$ es irreducible, no tiene G -submódulos invariantes.

Las irreducibles son las piedras angulares en el estudio de la teoría de representaciones de grupos, ya que una representación arbitraria siempre puede descomponerse en combinación lineal de representaciones irreducibles. Por ejemplo, si $\mathbf{D}(g)$ admite una transformación de semejanza a una forma como la siguiente

$$D = \begin{pmatrix} D^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D^{(3)} \end{pmatrix} \quad (8.15)$$

escribiremos que

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^{(1)} \oplus 2\mathbf{D}^{(2)} \oplus \mathbf{D}^{(3)}. \quad (8.16)$$

8.3.1. Reducibilidad y Reducibilidad Total

Lema 8.3.2 *Dada una representación de un grupo finito siempre podemos construir un producto escalar con respecto al cual esta representación es unitaria.*

Prueba:

Recordemos entonces, que si \mathbf{D} es una aplicación lineal de V en V , la aplicación adjunta o conjugada hermítica, \mathbf{D}^\dagger , se define a través de la ecuación

$$\langle \mathbf{D}\mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle \equiv \langle \mathbf{u} | \mathbf{D}^\dagger \mathbf{v} \rangle \quad (8.17)$$

La conjugación hermítica es una involución que permite caracterizar dos tipos de aplicaciones. Por un lado tenemos las aplicaciones *auto-adjuntas* o *hermíticas*, que son aquellas que verifican

$$\mathbf{D}^\dagger = \mathbf{D} \quad (8.18)$$

Por otro tenemos las *unitarias*, que se caracterizan por que $\mathbf{D}^\dagger = \mathbf{D}^{-1}$. Una forma equivalente de expresar esto es la siguiente

$$\langle \mathbf{D}\mathbf{u} | \mathbf{D}\mathbf{v} \rangle \equiv \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle \quad (8.19)$$

para toda pareja de vectores $|\mathbf{u}\rangle, |\mathbf{v}\rangle \in V$.

8.3.1.1 Supongamos que $\{\mathbf{D}(g)\}$ es una representación de G que actúa sobre el G -módulo V . Para demostrar el lema debemos ser capaces de construir un producto escalar $\langle\langle \cdot | \cdot \rangle\rangle$, para el cual la identidad (8.19) se verifique con $\mathbf{D} = \mathbf{D}(g)$, $\forall g \in G$. Partamos para ello del producto escalar hermítico $\langle \cdot | \cdot \rangle$ definido sobre V , y construyamos el siguiente producto escalar igualmente hermítico:

$$\langle\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle\rangle \equiv \frac{1}{\mathcal{O}(G)} \sum_{g \in G} \langle \mathbf{D}(g)\mathbf{u} | \mathbf{D}(g)\mathbf{v} \rangle. \quad (8.20)$$

Verifiquemos ahora el resultado deseado:

$$\begin{aligned} \langle\langle \mathbf{D}(h)\mathbf{u} | \mathbf{D}(h)\mathbf{v} \rangle\rangle &= \frac{1}{\mathcal{O}(G)} \sum_{g \in G} \langle \mathbf{D}(g)\mathbf{D}(h)\mathbf{u} | \mathbf{D}(g)\mathbf{D}(h)\mathbf{v} \rangle \\ &= \frac{1}{\mathcal{O}(G)} \sum_{g \in G} \langle \mathbf{D}(gh)\mathbf{u} | \mathbf{D}(gh)\mathbf{v} \rangle \\ &= \frac{1}{\mathcal{O}(G)} \sum_{g' = gh \in G} \langle \mathbf{D}(g')\mathbf{u} | \mathbf{D}(g')\mathbf{v} \rangle \\ &= \frac{1}{\mathcal{O}(G)} \sum_{g' \in G} \langle \mathbf{D}(g')\mathbf{u} | \mathbf{D}(g')\mathbf{v} \rangle \\ &= \langle\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle\rangle. \end{aligned} \quad (8.21)$$

■

8.3.1.2 A continuación nos podemos preguntar por la generalidad de las representaciones reducibles y las totalmente reducibles; llegamos de esta manera al siguiente teorema:

Teorema 8.3.1 Teorema de Maschke. *Para un grupo G finito o compacto, toda representación reducible es totalmente reducible.*

Prueba: partimos de un G -módulo, V , sobre el cual G actúa de forma reducible, es decir existe un subespacio U que es invariante. El subespacio orto-complementario W , (tal que $V = U \oplus W$ con respecto al producto escalar $\langle\langle \cdot | \cdot \rangle\rangle$), no es necesariamente invariante. Del hecho de que U y W son complementos ortogonales es evidente que, tomando dos vectores genéricos $|\mathbf{u}\rangle \in U$ y $|\mathbf{w}\rangle \in W$, se verifica que $\langle\langle \mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle\rangle = 0$. Así mismo, del hecho de que U es invariante bajo la acción de G se sigue automáticamente que:

$$\langle\langle \mathbf{D}(g)\mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle\rangle = 0, \quad \forall \mathbf{u} \in U, \forall g \in G. \quad (8.22)$$

Ahora, por ser \mathbf{D} unitaria con respecto a $\langle\langle \cdot | \cdot \rangle\rangle$, se sigue que también W es invariante

$$\langle\langle \mathbf{u} | \mathbf{D}(g)\mathbf{w} \rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{D}^{-1}(g)\mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{D}(g^{-1})\mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle\rangle = 0 \quad (8.23)$$

y por tanto \mathbf{D} es completamente reducible como especificaba el enunciado del teorema ■

8.3.1.3 Un grupo compacto es un grupo continuo con un número infinito de elementos. Sin embargo, la suma \sum_g puede ser remplazada por una integración invariante bajo la acción del grupo $\int d\mu(g) < \infty$

8.3.2. Propiedades de Representaciones Irreducibles.

En esta sección y en adelante, haremos la interpretación de *representación* como una colección de matrices. Es decir, como un automorfismo en una determinada base. Las propiedades que se mencionarán hacen referencia a características de algún miembro de la clase de matrices equivalentes bajo semejanza.

Ya hemos enunciado una propiedad importante:

I. Siempre podemos escoger una base de V , tal que las matrices de la representación de un grupo finito sean unitarias.

Debido a la existencia en V de un producto escalar hermítico $\langle\langle \cdot | \cdot \rangle\rangle$ con respecto al cual \mathbf{D} es una representación unitaria, podemos formar una base ortonormal $\{|\mathbf{e}_\alpha\rangle\}$ con respecto a dicho producto escalar. Claramente $D_{\alpha\beta}^\dagger = \langle\langle \mathbf{e}_\alpha | \mathbf{D}^\dagger | \mathbf{e}_\beta \rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{D} \mathbf{e}_\alpha | \mathbf{e}_\beta \rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{e}_\alpha | \mathbf{D}^{-1} | \mathbf{e}_\beta \rangle\rangle = D_{\alpha\beta}^{-1}$ es una matriz unitaria. Así pues, sin pérdida de generalidad consideraremos en lo que sigue *representaciones unitarias*. Trabajaremos además (mientras no se especifique lo contrario) en *bases ortonormales* para los G -módulos, de forma que las matrices $D_{\alpha\beta}^\alpha$ y $D_{\alpha\beta}$ coincidan. En este caso $D_{\alpha\beta}^+ = D_{\alpha\beta}^{-1} = D_{\beta\alpha}^*$.

8.3.2.1 Lemas de Shur

II. (Lema 1 de Schur) *Un operador lineal \mathbf{A} , que conmuta con todos los elementos de una irrep $\mathbf{D}(g)$, $\forall g \in G$ es, necesariamente, proporcional a la identidad* Es decir

$$[\mathbf{A}, \mathbf{D}(g)] \quad \forall g \in G = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \lambda \mathbb{I}$$

Prueba: La hipótesis sobre el conmutador implica que cualquier autoespacio $V_\lambda \in V$ de autovalor λ es globalmente invariante bajo la acción de G . Por ser irreducible, V_λ no puede ser un subespacio propio de V , así que sólo puede ser $V_\lambda = \{|0\rangle\}$ ó $V_\lambda = V$. Sobre los complejos la ecuación característica siempre tiene al menos una solución, de modo que sólo puede ser $V_\lambda = V$. ■

De éste lema se deduce un corolario importante:

Corolario 8.3.1 *Las representaciones irreducibles de un grupo abeliano son 1-dimensionales.*

Prueba: En un grupo abeliano $\mathbf{D}(g)$ conmuta con todas las demás matrices $\mathbf{D}(g')$, y por tanto, si pertenece a una representación irreducible, en virtud del Lema de Schur es proporcional a la identidad $\mathbf{D}(g) = \lambda_g \mathbb{I}$. Esto es cierto para $\mathbf{D}(g) \forall g \in G$. Por tanto $V = V_1 + V_2 + \dots + V_n$ donde V_i son subespacios unidimensionales invariantes.

III. (Lema 2 de Schur) *Sean $\mathbf{D}^{(a)}$ y $\mathbf{D}^{(b)}$ dos representaciones irreducibles de dimensiones d_a y d_b sobre sendos G -módulos $V^{(a)}$ y $V^{(b)}$ respectivamente (donde el superíndice etiqueta irreps distintas). Y sea $A : V^{(a)} \rightarrow V^{(b)}$ una operador lineal que verifica*

$$\mathbf{A} \mathbf{D}^{(a)}(g) = \mathbf{D}^{(b)}(g) \mathbf{A} \quad \forall g \in G, \quad (8.24)$$

Entonces, $A \equiv 0$ para $a \neq b$. Cuando $a = b$ el primer Lema de Schur es relevante.

IV. (Teorema Fundamental de Ortogonalidad). *Sean $D^{(a)}$ y $D^{(b)}$ dos representaciones irreducibles inequivalentes de dimensiones d_a y d_b respectivamente de un grupo G , entonces se verifica la relación de ortogonalidad siguiente*

$$\sum_{g \in G} D_{\alpha\mu}^{(a)}(g) D_{\nu\beta}^{(b)}(g^{-1}) = \frac{\mathcal{O}(G)}{d_a} \delta^{ab} \delta_{\alpha\nu} \delta_{\mu\beta} \quad (8.25)$$

Como hemos visto anteriormente siempre podemos considerar nuestras matrices unitarias. Entonces podemos reescribir (8.25) en la forma equivalente

$$\boxed{\sum_{g \in G} D_{\alpha\mu}^{(a)}(g) D_{\beta\nu}^{(b)*}(g) = \frac{\mathcal{O}(G)}{d_a} \delta^{ab} \delta_{\alpha\nu} \delta_{\mu\beta}.} \quad (8.26)$$

Prueba: Sean $\mathbf{D}^{(a)}$ y $\mathbf{D}^{(b)}$ dos representaciones s de dimensiones d_a y d_b respectivamente, y sea $\mathbf{A} : V^{(b)} \rightarrow V^{(a)}$ un operadores lineales arbitrario. Definamos otro operador $\mathbf{B} : V^{(b)} \rightarrow V^{(a)}$ mediante

$$\mathbf{B} \equiv \sum_{g \in G} \mathbf{D}^{(a)}(g) \mathbf{A} \mathbf{D}^{(b)}(g^{-1}). \quad (8.27)$$

(Esta expresión se puede generalizar a grupos compactos mediante la medida adecuada $\int d\mu(g)$). Es elemental demostrar la siguiente propiedad de la matriz \mathbf{B} : dado un elemento $h \in G$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{(a)}(h)\mathbf{B} &= \sum_g \mathbf{D}^{(a)}(h)\mathbf{D}^{(a)}(g) \mathbf{A} \mathbf{D}^{(b)}(g^{-1}) \\ &= \sum_g \mathbf{D}^{(a)}(hg) \mathbf{A} \mathbf{D}^{(b)}(g^{-1}) \\ &= \sum_{g'=hg} \mathbf{D}^{(a)}(hg) \mathbf{A} \mathbf{D}^{(b)}(g^{-1}) \\ &= \sum_{g'} \mathbf{D}^{(a)}(g') \mathbf{A} \mathbf{D}^{(b)}(g'^{-1}h) \\ &= \sum_{g'} \mathbf{D}^{(a)}(g') \mathbf{A} \mathbf{D}^{(b)}(g'^{-1}) \mathbf{D}^{(b)}(h) \\ &= \mathbf{B} \mathbf{D}^{(b)}(h), \end{aligned} \quad (8.28)$$

con lo cual $\mathbf{D}^{(a)}$, $\mathbf{D}^{(b)}$ y \mathbf{B} se encuentran en las hipótesis del Lema 2 de Schur (8.24), y en consecuencia $\mathbf{B} = 0$ a no ser que $a = b$ en cuyo caso las dos representaciones son la misma (nótese que hemos supuesto que a, b etiquetan representaciones no-equivalentes). Entonces el primer lema de Schur (??) entra en juego para decir que $\mathbf{B} = \lambda \mathbb{I}$. Podemos condensar esta información en la forma siguiente

$$\mathbf{B} = \sum_{g \in G} \mathbf{D}^{(a)}(g) \mathbf{A} \mathbf{D}^{(b)}(g^{-1}) = \lambda_A^{(a)} \delta^{ab} \mathbb{I} \quad (8.29)$$

que en una base ortonormal $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ se traduce en la siguiente ecuación para los elementos de matriz

$$B_{\alpha\beta} = \sum_{g \in G} D_{\alpha\gamma}^{(a)}(g) A_{\gamma\rho} D_{\rho\beta}^{(b)}(g^{-1}) = \lambda_A^{(a)} \delta^{ab} \delta_{\alpha\beta} \quad (8.30)$$

Existe una constante indeterminada que depende tanto de la matriz $A_{\gamma\rho}$ como de la representación irreducible $D^{(a)}$ que escojamos. Tomaremos una base de matrices con todos los elementos nulos excepto uno, o lo que es igual, $(A_{\mu\nu})_{\gamma\rho} = \delta_{\gamma\mu} \delta_{\rho\nu}$, y consecuentemente denotamos $\lambda_A^{(a)} = \lambda_{(\mu\nu)}^{(a)}$. Entonces, el elemento de matriz $\alpha\beta$ de (8.30) adopta la forma

$$\sum_{g \in G} D_{\alpha\mu}^{(a)}(g) D_{\nu\beta}^{(b)}(g^{-1}) = \lambda_{\mu\nu}^{(a)} \delta^{ab} \delta_{\alpha\beta} \quad \mu, \nu = 1, \dots, d_a \quad (8.31)$$

Para calcular $\lambda_{(\mu\nu)}^{(a)}$ igualamos en primer lugar $a = b$ y sumamos sobre los índices $\alpha = \beta = 1, \dots, d_a$, lo cuál implica

$$\sum_{g \in G} (D^{(a)}(g^{-1}) D^{(a)}(g))_{\nu\mu} = d_a \lambda_{(\mu\nu)}^{(a)} \quad (8.32)$$

y como cada uno de los elementos de la suma el miembro izquierdo es igual a la matriz diagonal $\delta_{\nu\mu}$, habiendo $\mathcal{O}(G)$ de ellos, llegamos a que

$$\mathcal{O}(G) \delta_{\mu\nu} = d_a \lambda_{(\mu\nu)}^{(a)} \quad (8.33)$$

A continuación, sustituyendo el valor encontrado de $\lambda_{(\mu\nu)}^{(a)}$ en la ecuación (8.31), obtenemos el enunciado del teorema (8.25) ■

8.3.2.2 Cota al número de irreps.

Sea G un grupo finito de orden $\mathcal{O}(G)$, el número de representaciones irreducibles $D^{(a)}$ de dimensiones d_a que admite está acotado por la expresión

$$\sum_{a \geq 1} d_a^2 \leq \mathcal{O}(G) \quad (8.34)$$

Para probarlo, consideremos el elemento $\alpha\beta$ de la a -ésima representación irreducible. Dado que g recorre los $\mathcal{O}(G)$ elementos del grupo, $D_{\alpha\beta}^{(a)}(g)$ toma $\mathcal{O}(G)$ valores que podemos organizar en un vector de $\mathcal{O}(G)$ componentes. El teorema de ortogonalidad nos dice que este vector es ortogonal a cualquier otro de la misma o de otra representación irreducible. Cada representación irreducible cuenta con d_a^2 de estos vectores, y por tanto el número total de ellos es $d_1^2 + d_2^2 + \dots$; los cuales, por lo que acabamos de ver, son todos linealmente independientes. El número total no puede, por tanto, exceder la dimensionalidad del espacio que subtienden, $\mathcal{O}(G)$, y así llegamos al resultado deseado \blacksquare

8.3.2.3 Operador de Proyección

Sea V un G -módulo de dimensión n , y supongamos que este módulo es reducible. Llamemos $\mathbf{D}(g)$ el operador lineal inducido en V por la acción del elemento g , y D a la representación correspondiente. Supongamos que $V = V^{(1)} \oplus V^{(2)} \oplus \dots \oplus V^{(p)}$ de dimensiones $d_1 + d_2 + \dots + d_p = n$. Esto quiere decir que existe una base $|\mathbf{e}_1\rangle, \dots, |\mathbf{e}_n\rangle$ de V , para la que la acción de G viene dada la “suma directa”

$$\mathbf{D}(g) = \mathbf{D}^{(1)} \oplus \mathbf{D}^{(2)} \oplus \dots \oplus \mathbf{D}^{(p)}. \quad (8.35)$$

Sea $\mathbf{D}^{(a)}$ una cierta representación irreducible de dimensión d_a que aparece en la descomposición de \mathbf{D} . Esto quiere decir que existe una base de d_a vectores ortonormales $|\mathbf{u}_\alpha\rangle$, $\alpha = 1, \dots, d_a$ que generan el subespacio $V^{(a)}$, y que por tanto verifican

$$\mathbf{D}(g)|\mathbf{u}_\alpha\rangle = \sum_{\beta=1}^{d_a} D_{\beta\alpha}^{(a)}(g)|\mathbf{u}_\beta\rangle, \quad (8.36)$$

y lo mismo puede decirse de las restantes representaciones. El conjunto de operadores lineales

$$\mathbf{P}_{\alpha\beta}^{(a)} = \frac{d_a}{\mathcal{O}(G)} \sum_g D_{\alpha\beta}^{(a)*}(g)\mathbf{D}(g), \quad \alpha, \beta = 1, \dots, d_a \quad (8.37)$$

es un conjunto de proyectores, en el sentido siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\alpha\beta}^{(a)}\mathbf{P}_{\mu\nu}^{(b)} &= \frac{d_a d_b}{\mathcal{O}(G)^2} \sum_{g, g'} D_{\alpha\beta}^{(a)*}(g)D_{\mu\nu}^{(b)*}(g')\mathbf{D}(gg') \\ &= \frac{d_a d_b}{\mathcal{O}(G)^2} \sum_{g, g''} D_{\alpha\beta}^{(a)*}(g)D_{\mu\nu}^{(b)*}(g^{-1}g'')\mathbf{D}(g'') \\ &= \frac{d_a d_b}{\mathcal{O}(G)^2} \sum_{g, g''} \sum_{\rho=1}^{d_b} D_{\alpha\beta}^{(a)*}(g)D_{\mu\rho}^{(b)*}(g^{-1})D_{\rho\nu}^{(b)*}(g'')\mathbf{D}(g'') \\ &= \frac{d_a d_b}{\mathcal{O}(G)^2} \sum_{g, g''} \sum_{\rho=1}^{d_b} D_{\alpha\beta}^{(a)*}(g)D_{\rho\mu}^{(b)}(g)D_{\rho\nu}^{(b)*}(g'')\mathbf{D}(g'') \\ &= \frac{d_a}{\mathcal{O}(G)} \delta^{\alpha\beta} \delta_{\beta\mu} \delta_{\alpha\rho} \sum_{g''} \sum_{\rho=1}^{d_b} D_{\rho\nu}^{(b)*}(g'')\mathbf{D}(g'') \\ &= \delta_{ab} \delta_{\beta\mu} \mathbf{P}_{\alpha\nu}^{(a)} \end{aligned} \quad (8.38)$$

después de haber utilizado la relación de ortogonalidad (8.26).

8.3.2.4 El operador $\mathbf{P}_{\alpha\beta}^{(a)}$ no es autoadjunto:

Ejercicio 8.3.1 Probar que para $D^{(a)}$ una representación unitaria, se verifica

$$\mathbf{P}_{\alpha\beta}^{(a)+} = \mathbf{P}_{\beta\alpha}^{(a)}. \quad (8.39)$$

8.3.2.5 El operador definido en (8.37) proyecta cualquier vector $|\mathbf{v}\rangle \in V$, sobre el subespacio invariante $V^{(a)}$. En particular esto implica que la acción del grupo sobre el vector proyectado sólo es combinación de vectores en el mismo subespacio:

Teorema 8.3.2 *Dado un vector \mathbf{v} arbitrario, y β fijo, el conjunto de d_a vectores*

$$|\mathbf{u}_\alpha\rangle \equiv \frac{1}{|P_{\beta\beta}^{(a)}|\mathbf{v}\rangle|} P_{\alpha\beta}^{(a)}|\mathbf{v}\rangle, \quad \alpha = 1, \dots, d_a, \quad (8.40)$$

forma una base ortonormal para el G -submódulo invariante $V^{(a)}$. Bajo la acción del $\mathbf{D}(d)$, los elementos de esta base se transforma mediante la matriz unitaria $D_{\alpha\beta}^{(a)}$

$$\mathbf{D}(g)|\mathbf{u}_\alpha\rangle = \sum_{\nu=1}^{d_a} D_{\nu\alpha}^{(a)}|\mathbf{u}_\nu\rangle. \quad (8.41)$$

Prueba: Empezaremos probando que $|\mathbf{u}_\alpha\rangle$ forman una base ortonormal (naturalmente con respecto al mismo producto escalar $\langle\langle \cdot | \cdot \rangle\rangle$ que hace de T un operador unitario)

$$\begin{aligned} \langle\langle \mathbf{u}_\mu | \mathbf{u}_\nu \rangle\rangle &= \frac{1}{|P_{\beta\beta}^{(a)}|\mathbf{v}\rangle|^2} \langle\langle \mathbf{P}_{\mu\beta}^{(a)}\mathbf{v} | \mathbf{P}_{\nu\beta}^{(a)}\mathbf{v} \rangle\rangle \\ &= \frac{1}{|P_{\beta\beta}^{(a)}|\mathbf{v}\rangle|^2} \langle\langle \mathbf{v} | \mathbf{P}_{\mu\beta}^{(a)+} \mathbf{P}_{\nu\beta}^{(a)}\mathbf{v} \rangle\rangle \\ &= \frac{1}{|P_{\beta\beta}^{(a)}|\mathbf{v}\rangle|^2} \langle\langle \mathbf{v} | \mathbf{P}_{\beta\mu}^{(a)} \mathbf{P}_{\nu\beta}^{(a)}\mathbf{v} \rangle\rangle \\ &= \frac{1}{|P_{\beta\beta}^{(a)}|\mathbf{v}\rangle|^2} \delta_{\mu\nu} \langle\langle \mathbf{v} | \mathbf{P}_{\beta\beta}^{(a)}\mathbf{v} \rangle\rangle \\ &= \delta_{\mu\nu} \frac{1}{|P_{\beta\beta}^{(a)}|\mathbf{v}\rangle|^2} \langle\langle \mathbf{P}_{\beta\beta}^{(a)}\mathbf{v} | \mathbf{P}_{\beta\beta}^{(a)}\mathbf{v} \rangle\rangle \\ &= \delta_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (8.42)$$

Una vez probado este resultado, y al ser \mathbf{D} unitario,¹ podemos demostrar la segunda parte del teorema:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(h)|\mathbf{u}_\alpha\rangle &= \mathbf{D}(h) \left(\frac{1}{|P_{\beta\beta}^{(a)}|\mathbf{v}\rangle|} P_{\alpha\beta}^{(a)}|\mathbf{v}\rangle \right) \\ &= \frac{d_a}{|P_{\beta\beta}^{(a)}|\mathbf{v}\rangle|} \sum_g D_{\alpha\beta}^{(a)*}(g) \mathbf{D}(h) \mathbf{D}(g)|\mathbf{v}\rangle \\ &= \frac{d_a}{|P_{\beta\beta}^{(a)}|\mathbf{v}\rangle|} \sum_g D_{\alpha\beta}^{(a)*}(g) \mathbf{D}(hg)|\mathbf{v}\rangle \\ &= \frac{d_a}{|P_{\beta\beta}^{(a)}|\mathbf{v}\rangle|} \sum_{g'} D_{\alpha\beta}^{(a)*}(h^{-1}g') \mathbf{D}(g')|\mathbf{v}\rangle \\ &= \frac{d_a}{|P_{\beta\beta}^{(a)}|\mathbf{v}\rangle|} \sum_{g'} \left(\sum_\nu D_{\alpha\nu}^{(a)*}(h^{-1}) D_{\nu\beta}^{(a)*}(g') \right) \mathbf{D}(g')|\mathbf{v}\rangle \\ &= \sum_\nu D_{\nu\alpha}^{(a)}(h) \left(\frac{d_a}{|P_{\beta\beta}^{(a)}|\mathbf{v}\rangle|} \sum_{g'} D_{\nu\beta}^{(a)*}(g') \mathbf{D}(g')|\mathbf{v}\rangle \right) \\ &= \sum_\nu D_{\nu\alpha}^{(a)}(h) |\mathbf{u}_\nu\rangle \end{aligned} \quad (8.43)$$

■

¹nótese que bajo la acción de los elemento de T , la propiedad de ortonormalidad de la base se mantiene por ser unitario, y por tanto el tensor métrico es siempre δ_{ij} .

8.4. Caracteres

8.4.0.6 Una matriz $D^\alpha_\beta(g)$ sólo caracteriza una representación $\mathbf{D}(g)$ en una base $\{|\mathbf{e}_\alpha\rangle\}$. Sería deseable encontrar alguna caracterización intrínseca de la representación, independiente de la base. Dada una matriz D hay dos cantidades invariantes bajo transformaciones de semejanza, $\det D$ y $\text{tr } D$:

$$\begin{aligned}\det(S^{-1}DS) &= \det S^{-1} \det D \det S = \det D \\ \text{tr}(S^{-1}DS) &= \text{tr}(DSS^{-1}) = \text{tr } D\end{aligned}\tag{8.44}$$

Definición 8.4.1 *El carácter de una representación \mathbf{D} de un grupo G , es el conjunto χ de números complejos $\chi = \{\chi(g) = \text{tr } D(g), g \in G\}$ calculado en cualquier base.*

8.4.0.7 Veamos como ejemplo las representaciones de orden más bajo de los grupos isomorfos $S_3 \sim D_3$, y sus respectivos caracteres.

$g \in S_3$	$g \in D_3$	$D^{(1)}$	$D^{(2)}$	$D^{(3)}$	$\chi^{(1)}$	$\chi^{(2)}$	$\chi^{(3)}$
()	e	1	1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	1	1	2
(123)	c	1	1	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$	1	1	-1
(132)	c^2	1	1	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$	1	1	-1
(23)	x	1	-1	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$	1	-1	0
(13)	xc	1	-1	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$	1	-1	0
(12)	xc^2	1	-1	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	1	-1	0

8.4.0.8 Recopilemos algunas propiedades que hacen interesante la información contenida en los caracteres.

- (i) El carácter depende de la representación y es independiente de la base $\{|\mathbf{e}_i\rangle\}$ en la que se calcula $\xi^{(a)} = \xi(\mathbf{D}^{(a)})$.
- (ii) El carácter del elemento unidad coincide con la dimensión de la representación $\chi(e) = n$.
Es evidente puesto que la matriz que representa al elemento e es siempre la unidad.
- (iii) Los caracteres son funciones de la clase de conjugación (g).

Esto es fácil de probar, puesto que las matrices que representan dos elementos conjugados g , y $g' = hgh^{-1}$ son equivalentes:

$$\mathbf{D}(g') = \mathbf{D}(hgh^{-1}) = \mathbf{D}(h)\mathbf{D}(g)\mathbf{D}(h)^{-1}\tag{8.46}$$

y por tanto las matrices $D(g)$ y $D(g')$ comparten la misma traza.

(iv) Si \mathbf{D} es unitaria, $\mathbf{D}^\dagger = \mathbf{D}^{-1}$, entonces $\chi(g^{-1}) = \chi^*(g)$.

Es evidente ya que $D^\dagger{}^\alpha = D_\alpha{}^{\alpha*}$.

8.4.1. Ortogonalidad de los Caracteres

Podemos visualizar el carácter, $\chi^{(a)}$, asociado a una representación arbitraria $D^{(a)}$, como un vector $(\chi^{(a)}(g_1), \chi^{(a)}(g_2), \dots)$ en un espacio vectorial de dimensión $\mathcal{O}(G)$. Dados dos caracteres ϕ y χ , podemos definir un producto escalar hermítico en la forma

$$\langle \phi | \chi \rangle \equiv \frac{1}{\mathcal{O}(G)} \sum_{g \in G} \phi^*(g) \chi(g) = \frac{1}{\mathcal{O}(G)} \sum_{g \in G} \phi(g^{-1}) \chi(g); \quad (8.47)$$

de hecho este producto escalar es real y simétrico $\langle \phi | \chi \rangle = \langle \chi | \phi \rangle$ como puede comprobarse fácilmente.

Teorema 8.4.1 (Teorema de Ortogonalidad de Caracteres). *Los caracteres $\chi^{(a)}$ y $\chi^{(b)}$, asociados a dos representaciones irreducibles $D^{(a)}$ y $D^{(b)}$, son ortonormales con respecto al producto escalar definido en (8.47)*

$$\langle \chi^{(a)} | \chi^{(b)} \rangle = \delta^{ab}. \quad (8.48)$$

Prueba. Partiendo de la ecuación (8.26) podemos tomar la traza sobre los índices $\alpha = \mu$ y $\beta = \nu$ y obtenemos así

$$\frac{1}{\mathcal{O}(G)} \sum_{g \in G} \chi^{(a)*}(g) \chi^{(b)}(g) = \delta^{ab} \frac{1}{d_a} \sum_{\mu, \nu} \delta_{\mu\nu} \delta_{\mu\nu} = \delta^{ab} \quad (8.49)$$

■

8.4.1.1 Los vectores $\chi^{(a)}$, $a = 1, \dots, r$ no forman una base del espacio de dimensión $\mathcal{O}(G)$ debido a que, en general $r \leq \mathcal{O}(G)$. Sin embargo advertimos que debido a la propiedad (ii) anteriormente mencionada, si en G hay s clases de conjugación K_p , $p = 1, \dots, s$, cada una de ellas con k_p elementos, los caracteres distintos podemos denotarlos $\chi_p^{(a)}$, $p = 1, \dots, k$, de forma que la suma anterior puede escribirse en la forma

$$\langle \chi^{(a)} | \chi^{(b)} \rangle = \frac{1}{\mathcal{O}(G)} \sum_{p=1}^s k_p \chi_p^{(a)*} \chi_p^{(b)} = \delta^{ab}, \quad (8.50)$$

donde la suma se efectúa sobre clases de conjugación (g_p). Esta expresión puede ser interpretada como ortogonalidad de los r vectores ξ^a de componentes $\xi_p^{(a)} \equiv \sqrt{\frac{k_p}{\mathcal{O}(G)}} \chi_p^{(a)}$, $p = 1, \dots, s$ con respecto al producto escalar usual que consiste en sumar los productos de las componentes:

$$\langle \langle \xi^{(a)} | \xi^{(b)} \rangle \rangle = \sum_{p=1}^s \xi_p^{(a)} \xi_p^{(b)*} = \delta^{ab}, \quad a, b = 1, \dots, r \quad (8.51)$$

Por ser ortogonales, son l.i. y por tanto no puede haber más de s vectores de este tipo. Tenemos entonces una desigualdad que acota el número de representaciones irreducibles r , a saber $r \leq s$.

8.4.1.2 Curiosamente, puede demostrarse que en $\xi_p^a \equiv \sqrt{\frac{k_p}{\mathcal{O}(G)}} \chi_p^{(a)}$ también podemos fijar el subíndice p a un valor comprendido entre 1 y s , y los s vectores ξ_p formados con las componentes ξ_p^a , $a = 1, \dots, r$ verifican ortogonalidad con respecto a otro producto escalar

$$((\chi_p | \chi_q)) = \frac{1}{\mathcal{O}(G)} \sum_{a=1}^r k_p \chi_p^{(a)*} \chi_q^{(a)} = \delta_{pq}. \quad (8.52)$$

o lo que es igual

$$((\xi_p | \xi_q)) = \sum_{i=1}^r \xi_p^{(i)*} \xi_q^{(i)} = \delta_{pq}. \quad (8.53)$$

Un argumento análogo al anterior implica que en este caso, el número s de vectores no puede superar el de la dimensionalidad del espacio, r , es decir $s \leq r$.

8.4.1.3 La suma de conclusiones que, sobre r y s se desprenden de (8.51) y (8.53) nos conduce al enunciado del siguiente lema

Lema 8.4.1 *En un grupo finito, G , el número de representaciones irreducibles r , y el de clases de conjugación s , coinciden $r = s$.*

8.4.1.4 Además, las identidades (8.51) y (8.53) se pueden también resumir como sigue

Lema 8.4.2 *El conjunto de cantidades $\xi_p^a = \sqrt{\frac{k_p}{\mathcal{O}(G)}} \chi_p^{(a)}$, donde $a = 1, \dots, r$ es un índice de representación, y $p = 1, \dots, s$, es un índice de clase de conjugación, forman una matriz cuadrada ($r = s$) y unitaria.*

8.4.2. Descomposición en Representaciones Irreducibles

8.4.2.1 Para un grupo finito o compacto sabemos que las representaciones reducibles son totalmente reducibles en suma directa de representaciones irreducibles (*irreps*). Tal y como hemos visto en el ejemplo (8.16), una misma representación irreducible puede aparecer más de una vez, de modo que escribiremos en el caso general una descomposición de la forma

$$\mathbf{D} = \sum_{\oplus} n_a \mathbf{D}^{(a)}. \quad (8.54)$$

Esto indica que podemos dotar al conjunto de todas las representaciones de un grupo de una estructura de espacio vectorial sobre los números naturales, donde una base esta formada por las irreducibles.

8.4.2.2 Además los coeficientes naturales n_a pueden ser deducidos fácilmente usando las propiedades de ortogonalidad anteriores. Efectivamente, tomando la traza en la ecuación (8.54) para un elemento genérico $g \in G$ obtenemos,

$$\chi(g) = \sum_a n_a \chi^{(a)}(g). \quad (8.55)$$

Multiplicando por $\chi^{(b)*}(g)$ y sumando sobre $g \in G$

$$\begin{aligned} \sum_g \chi^{(b)*}(g) \chi(g) &= \sum_a n_a \sum_g \chi^{(b)*}(g) \chi^{(a)}(g) \\ &= \sum_a n_a \mathcal{O}(G) \delta^{ab} \\ &= \mathcal{O}(G) n_b \end{aligned} \quad (8.56)$$

lo cual implica sencillamente que

$$n_a = \langle \chi^{(a)} | \chi \rangle. \quad (8.57)$$

Corolario 8.4.1 Una representación D es irreducible si y sólo si verifica la condición

$$\frac{1}{\mathcal{O}(G)} \sum_g |\chi(g)|^2 = 1. \quad (8.58)$$

Prueba. Supongamos que la representación D es equivalente a la suma directa de representaciones expresada en (8.54); entonces verifica:

$$\frac{1}{\mathcal{O}(G)} \sum_g |\chi(g)|^2 = \frac{1}{\mathcal{O}(G)} \sum_{a,b} \sum_g n_a n_b \chi^{(a)}(g)^* \chi^{(b)}(g) = \sum_a n_a^2 \quad (8.59)$$

en virtud de (8.55) y (8.50). Ahora bien, es evidente del significado de la descomposición (8.54), que si D es irreducible, entonces $n_a = \delta_{aD}$ y por tanto la anterior suma es igual a 1 ■

8.4.2.3 La generalización a un grupo continuo compacto es directa, sin más que sustituir la suma por la integral invariante sobre el grupo:

$$\int_g |\chi(g)|^2 dg = 1. \quad (8.60)$$

8.4.3. La Representación Regular

8.4.3.1 El grupo finito S_n tiene una representación de orden n evidente. Cada elemento viene representado por una matriz D^i_j donde por cada columna y cada fila hay una sólo componente igual a 1, y el resto son iguales a 0. Por ejemplo en S_3 el elemento (12) viene representado por la matriz que efectúa el intercambio de las componentes primera y segunda, es decir

$$D(12) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.61)$$

y así sucesivamente.

Según el Teorema de Cayley hay un isomorfismo entre todo grupo finito G de orden n y un subgrupo del grupo simétrico S_n , que tiene su origen en la multiplicación por la izquierda

$$gg_i = D^j_i(g)g_j \quad (8.62)$$

donde las matrices D^i_j forman una representación n dimensional del grupo llamada *representación regular*. Ahora bien, gg_i es algún elemento g_l de G , con $g_l \neq g_i$ excepto cuando $g = e$. Por tanto, la representación regular de un grupo G de orden $\mathcal{O}(G) = n$ está formada por matrices que tienen todos los elementos fuera de la diagonal, excepto para $g = e$ para la cuál es la matriz identidad. Por esta razón los caracteres de la representación regular son siempre de la misma forma:

$$\chi(g) = \begin{cases} 0 & g \neq e \\ \mathcal{O}(G) & g = e \end{cases} \quad (8.63)$$

Tomemos por ejemplo C_3

$$D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D(c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D(c^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.64)$$

La sencillez de la representación regular nos permite demostrar un resultado que ya habíamos anunciado

Teorema 8.4.2 *En un grupo finito, G , la suma de los cuadrados de las dimensiones de las representaciones irreducibles, es igual al orden $\mathcal{O}(G)$*

$$\sum_a d_a^2 = \mathcal{O}(g)$$

Prueba: vamos a descomponer la representación regular en sus componentes irreducibles:

$$\mathbf{D} = \sum_{\oplus} n_a \mathbf{D}^{(a)}. \quad (8.65)$$

Los coeficientes n_a vienen dados por (8.57)

$$n_a = \langle \chi^{(a)} | \chi \rangle = \frac{1}{\mathcal{O}(G)} \sum_g \chi^{(a)*}(g) \chi(g) = \chi^{(a)*}(e) = d_a \quad (8.66)$$

Por otro lado, tomando trazas en (8.65) llegamos a (8.55),

$$\chi(g) = \sum_a n_a \chi^{(a)}(g) = \sum_a d_a \chi^{(a)}(g). \quad (8.67)$$

y particularizando para $g = e$ obtenemos

$$\mathcal{O}(G) = \sum_a d_a^2$$

■

También podemos verificar la validez de la identidad (8.52) en el caso particular $g \neq e$, (en cuyo caso $k_e = 1$); entonces

$$0 = \sum_a d_a \chi^{(a)}(g) \quad (8.68)$$

y las dos últimas ecuaciones pueden resumirse en la forma combinada

$$\frac{1}{\mathcal{O}(G)} \sum_a \chi^{(a)*}(e) \chi^{(a)}(g) = \begin{cases} 0 & g \neq e \\ 1 & g = e \end{cases} \quad (8.69)$$

8.5. Construcción de una Tabla de Caracteres

La forma convencional de presentar los caracteres de las representaciones irreducibles de un grupo finito G es una tabla donde las filas corresponden a diferentes representaciones irreducibles y las columnas a diferentes clases de conjugación. En la construcción de esta tabla haremos uso de la siguiente información

- (i) En virtud del lema (8.4.1), sabemos que esta tabla será cuadrada.
- (ii) $\sum_a d_a^2 = \mathcal{O}(G)$

(iii) Ortogonalidad: $\sum_p k_p \chi_p^{(a)} \chi_p^{(b)} = \mathcal{O}(G) \delta^{ab}$

(iv) Cualquier otra información. Por ejemplo el hecho de que para grupos abelianos, los caracteres *coinciden* con las representaciones irreducibles mismas, al ser éstas unidimensionales. Por tanto los caracteres no son otra cosa que un conjunto de números complejos que simulan bajo multiplicación la ley del grupo.

Veamos algunos ejemplos.

8.5.1. Tabla de Caracteres de C_3

8.5.1.1 Este grupo es abeliano y consta de tres elementos $\{e, c, c^2\}$, que son clases de conjugación completas. Por tanto tendremos 3 representaciones irreducibles $\mathbf{D}^{(a)}(g) = 1$, $i = 1, 2, 3$ unidimensionales que, como hemos visto, coinciden con sus caracteres. Como obligatoriamente $\mathbf{D}^{(a)}(e) = 1$, $i = 1, 2, 3$ y además $\mathbf{D}^{(a)}(c^3) = (\mathbf{D}^{(a)})^3(c)$, necesariamente $\mathbf{D}^{(a)}(c)$ ha de ser una de las dos raíces cúbicas de la unidad, $\omega = e^{\pi/3}$ ó $\omega^2 = e^{2\pi/3}$. Si además han de cumplir la relación de ortogonalidad (iii) la única posibilidad es

$$\begin{array}{c|ccc} C_3 & e & c & c^2 \\ \hline \mathbf{D}^{(1)} & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{D}^{(2)} & 1 & \omega & \omega^2 \\ \mathbf{D}^{(3)} & 1 & \omega^2 & \omega \end{array} \quad (8.70)$$

La representación $\mathbf{D}^{(1)}$ es la representación trivial que existe para todo grupo y que no es fiel. Las dos representaciones fieles $\mathbf{D}^{(2)}$ y $\mathbf{D}^{(3)}$ son inequivalentes. De hecho son complejas conjugadas la una de la otra. Es un ejercicio elemental comprobar que $\langle \chi^{(a)} | \chi^{(b)} \rangle = \delta^{ab}$.

8.5.1.2 Antes de pasar a otro ejemplo vamos a ver de qué manera la tabla de caracteres nos ayuda a encontrar cómo la representación vectorial \mathbf{D}^V (c.f. (8.7)) que actúa sobre el espacio vectorial tridimensional $\text{lin}(|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle)$, se descompone en representaciones irreducibles. A la vista de la matrices (8.7), el carácter de esta representación es

$$|\chi^V\rangle = (\chi^V(e), \chi^V(c), \chi^V(c^2)) = (3, 0, 0), \quad (8.71)$$

y si queremos escribirlo como

$$|\chi^V\rangle = n_1 |\chi^{(1)}\rangle + n_2 |\chi^{(2)}\rangle + n_3 |\chi^{(3)}\rangle, \quad (8.72)$$

podemos ver por simple inspección (sumando las filas de la tabla (8.70)) que

$$|\chi^V\rangle = |\chi^{(1)}\rangle + |\chi^{(2)}\rangle + |\chi^{(3)}\rangle \quad (8.73)$$

Alternativamente podemos tomar los productos escalares $n_a = \langle \chi^{(a)} | \chi^V \rangle$ para demostrar que $n_1 = n_2 = n_3 = 1$. Por tanto la representación vectorial se descompone en la forma

$$\mathbf{D}^V = \mathbf{D}^{(1)} \oplus \mathbf{D}^{(2)} \oplus \mathbf{D}^{(3)}. \quad (8.74)$$

8.5.1.3 Nos queda identificar las combinaciones sobre las que C_3 actúa de forma irreducible, o, equivalentemente los G -submódulos invariantes. En el caso presente es relevante el comentario siguiente: los subespacios invariantes coinciden con los subespacios propios comunes a $\mathbf{D}^V(e)$, $\mathbf{D}^V(c)$ y $\mathbf{D}^V(c^2)$. Esto es debido a que como sabemos, estas tres matrices conmutan entre sí por tratarse de una representación de un grupo abeliano. Este hecho es suficiente para saber que podemos encontrar una base que las diagonalice simultáneamente. Esta es una demostración independiente

del corolario (8.3.1), que afirma que las representaciones irreducibles de un grupo abeliano son unidimensionales.

De la forma de las matrices (8.7) es evidente que el subespacio $\text{lin}(|\mathbf{e}_3\rangle)$ es invariante frente a la acción de todos los elementos. Por tanto $|\mathbf{e}_3\rangle$ forma la base de la representación trivial $\mathbf{D}^{(1)}$ mientras que $\mathbf{D}^{(2)}$ y $\mathbf{D}^{(3)}$ actúan en el plano (x, y) . Para analizar estas últimas, consideremos las combinaciones $|\mathbf{e}_\pm\rangle = |\mathbf{e}_2\rangle \pm i|\mathbf{e}_3\rangle$. La matriz que cambia de la base $(|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle)$ a la base $(|\mathbf{e}_+\rangle, |\mathbf{e}_-\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle)$ tiene la forma

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.75)$$

y en esta nueva base la representación vectorial adopta la forma semejante $\tilde{D}^V = S^{-1}D^V S$

$$\begin{aligned} \tilde{D}^V(e) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \tilde{D}^V(c) &= \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \tilde{D}^V(c^2) &= \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8.76)$$

es decir, en rigor $D^V = D^{(3)} \oplus D^{(2)} \oplus D^{(1)}$.

8.5.2. Tabla de Caracteres de \mathbf{D}_3

Empecemos recordando las tres clases de conjugación que posee este grupo $K_1 = (e)$, $K_2 = (c, c^2)$, $K_3 = (x, xc, xc^2)$. Esperamos por tanto tres representaciones irreducibles $\mathbf{D}^{(1)}$, $\mathbf{D}^{(2)}$ y $\mathbf{D}^{(3)}$, cuyas dimensiones satisfacen $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 6$. Dado que la representación trivial siempre existe $D^{(1)}(g) = 1$ nos queda $d_2^2 + d_3^2 = 5$, cuya única solución entera es $d_2 = 1$ y $d_3 = 2$. Como sabemos que $\chi^{(a)}(e) = d_a$ ya tenemos la primera fila y la primera columna de la tabla

8.5.2.1 Para completar la segunda fila recordamos que una representación unidimensional coincide con el carácter de forma que la multiplicación de caracteres reproduce la de los elementos del grupo. En particular, de $\chi_3^{(2)} = \chi^{(2)}(x) = \chi^{(2)}(xc) = \chi^{(2)}(x)\chi^{(2)}(c)$ llegamos a la conclusión de que $\chi^{(2)}(c) = \chi_2^{(2)} = 1$. El último número de la fila $\chi_3^{(2)}$ se obtiene de la relación de ortogonalidad

$$\frac{1}{6}(1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot \chi_3^{(2)}) = \frac{1}{6}(3 + 3\chi_3^{(2)}) = 0 \quad (8.77)$$

es decir $\chi_3^{(2)} = -1$. Las únicas dos incógnitas de momento son $\chi_2^{(3)}$ y $\chi_3^{(3)}$

D_3	K_1	K_2	K_3	(8.78)
$\mathbf{D}^{(1)}$	1	1	1	
$\mathbf{D}^{(2)}$	1	1	-1	
$\mathbf{D}^{(3)}$	2	$\chi_2^{(3)}$	$\chi_3^{(3)}$	

que podemos ajustar requiriendo ortogonalidad

$$\langle \chi^{(1)} | \chi^{(3)} \rangle = \frac{1}{6}(2 + 2\chi_2^{(3)} + 3\chi_3^{(3)}) = 0 \quad (8.79)$$

$$\langle \chi^{(2)} | \chi^{(3)} \rangle = \frac{1}{6}(2 + 2\chi_2^{(3)} - 3\chi_3^{(3)}) = 0 \quad (8.80)$$

cuya única solución es $\chi_2^{(3)} = -1$ y $\chi_3^{(3)} = 0$. Con estos números, la ortonormalidad $\langle \chi^{(a)}, \chi^{(b)} \rangle = \delta^{ab}$ se verifica, y podemos escribir la tabla completa

$$\begin{array}{c|ccc} D_3 & K_1 & K_2 & K_3 \\ \mathbf{D}^{(1)} & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{D}^{(2)} & 1 & 1 & -1 \\ \mathbf{D}^{(3)} & 2 & -1 & 0 \end{array} \quad (8.81)$$

8.5.2.2 Al igual que en el caso anterior, podemos analizar la forma en la que la representación vectorial se descompone en representaciones irreducibles de D_3 . Si usamos la misma base que en el caso de C_3 , vemos que en (8.7) ya tenemos las matrices correspondientes a 3 de los 6 elementos de D_3 . Nos falta la matriz que representa al menos uno de los giros x, xc ó xc^2 . Sin pérdida de generalidad podemos tomar xc^2 , la rotación de 180 grados en torno al eje \mathbf{e}_2 , y su matriz correspondiente será entonces

$$\mathbf{D}^V(xc^2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (8.82)$$

cuya traza nos da el carácter de la clase de conjugación entera $\chi_3^V = -1$.

Las otras dos matrices se encuentran por simple multiplicación: $\mathbf{D}^V(x) = \mathbf{D}^V(xc^2)\mathbf{D}^V(c)$, etc.

8.5.2.3 El carácter de la representación vectorial es por tanto

$$\chi^V = (3, 0, -1) \quad (8.83)$$

que se descompone de nuevo fácilmente

$$n_1 = \langle \chi^{(1)} | \chi^V \rangle = \frac{1}{6}(3 + 0 - 3) = 0 \quad (8.84)$$

$$n_2 = \langle \chi^{(2)} | \chi^V \rangle = \frac{1}{6}(3 + 0 + 3) = 1 \quad (8.85)$$

$$n_3 = \langle \chi^{(3)} | \chi^V \rangle = \frac{1}{6}(6 + 0 + 0) = 1, \quad (8.86)$$

o sea que $|\chi^V\rangle = |\chi^{(2)}\rangle + |\chi^{(3)}\rangle$ o equivalentemente

$$\mathbf{D}^V = \mathbf{D}^{(2)} \oplus \mathbf{D}^{(3)} \quad (8.87)$$

Correspondientemente vemos que la descomposición de V es G -submódulos invariantes es $V = \text{lin}(|\mathbf{e}_3\rangle) \oplus \text{lin}(|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle)$. El primer subespacio ya no es reducible como era el caso de C_3 .

Ejercicio 8.5.1 Construir la tabla de caracteres de A_4 , el grupo alternante de cuatro elementos.

8.6. Producto Directo de Representaciones

8.6.1. Producto Directo de Representaciones, Reducibilidad.

8.6.1.1 Consideremos dos G -módulos $V^{(a)}$ y $V^{(b)}$. Es decir, dos espacios vectoriales sobre los que actúa el grupo G mediante dos representaciones $\mathbf{D}^{(a)}$ y $\mathbf{D}^{(b)}$ de dimensiones d_a y d_b , es decir, $\forall g \in G$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{(a)}(g)|\mathbf{e}_i^{(a)}\rangle &= \sum_j D_{ji}^{(a)}(g)|\mathbf{e}_j^{(a)}\rangle \\ \mathbf{D}^{(b)}(g)|\mathbf{e}_k^{(b)}\rangle &= \sum_l D_{lk}^{(b)}(g)|\mathbf{e}_l^{(b)}\rangle \end{aligned} \quad (8.88)$$

Teorema 8.6.1 Si $\mathbf{D}^{(a)}$ y $\mathbf{D}^{(b)}$ definen dos representaciones unitarias e irreducibles de un grupo G sobre $V^{(a)}$ y $V^{(b)}$, con dimensiones d_a y d_b repectivamente, entonces el conjunto de operadores $\{\mathbf{D}^{(a\otimes b)}(g) \equiv \mathbf{D}^{(a)}(g) \otimes \mathbf{D}^{(b)}(g), g \in G\}$ definen una representación unitaria de G actuando sobre el espacio producto tensorial $V = V^{(a)} \otimes V^{(b)}$. El carácter de $\mathbf{D}^{(a\otimes b)}$ es el producto de los caracteres de $\mathbf{D}^{(a)}$ y $\mathbf{D}^{(b)}$

$$\chi^{(a\otimes b)}(g) = \chi^{(a)}(g)\chi^{(b)}(g). \quad (8.89)$$

Demostración: Sea $|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{v}_a\rangle \otimes |\mathbf{v}_b\rangle$ un elemento arbitrario de V . Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{(a\otimes b)}(g')\mathbf{D}^{(a\otimes b)}(g)|\mathbf{v}\rangle &= \mathbf{D}^{(a\otimes b)}(g') \left(\mathbf{D}^{(a)}(g)|\mathbf{v}_a\rangle \otimes \mathbf{D}^{(b)}(g)|\mathbf{v}_b\rangle \right) \\ &= \mathbf{D}^{(a)}(g')\mathbf{D}^{(a)}(g)|\mathbf{v}_a\rangle \otimes \mathbf{D}^{(b)}(g')\mathbf{D}^{(b)}(g)|\mathbf{v}_b\rangle \\ &= \mathbf{D}^{(a)}(g'g)|\mathbf{v}_a\rangle \otimes \mathbf{D}^{(b)}(g'g)|\mathbf{v}_b\rangle \\ &= \mathbf{D}^{(a\otimes b)}(gg')|\mathbf{v}\rangle. \end{aligned} \quad (8.90)$$

Además, si $\mathbf{D}^{(a)}$ y $\mathbf{D}^{(b)}$ son unitarias,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{(a\otimes b)+}|\mathbf{v}\rangle &= \mathbf{D}^{(a)+}|\mathbf{v}_a\rangle \otimes \mathbf{D}^{(b)+}|\mathbf{v}_b\rangle \\ &= \mathbf{D}^{(a)-1}|\mathbf{v}_a\rangle \otimes \mathbf{D}^{(b)-1}|\mathbf{v}_b\rangle \\ &= (\mathbf{D}^{(a\otimes b)})^{-1}|\mathbf{v}\rangle \end{aligned} \quad (8.91)$$

y $\mathbf{D}^{(a\otimes b)}$ también lo es.

Por último, en cualquier base $\{|\mathbf{e}_{ij}\rangle = |\mathbf{e}_i\rangle \otimes |\mathbf{e}_j\rangle\}$ la matriz que representa el operador $\mathbf{D}^{(a\otimes b)}$ es el producto de Kronecker de las matrices que representan respectivamente $\mathbf{D}^{(a)}$ y $\mathbf{D}^{(b)}$.

$$D^{(a\otimes b)ij}_{kl} = D^{(a)i}_k D^{(b)j}_l \quad (8.92)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \chi^{(a\otimes b)}(g) &= \text{tr}(D^{(a)} \otimes D^{(b)})(g) \\ &= D^{(a\otimes b)ij}_{ij} \\ &= D^{(a)i}_i(g)D^{(b)j}_j(g) \\ &= \chi^{(a)}(g)\chi^{(b)}(g) \end{aligned} \quad (8.93)$$

■

8.6.2. Serie de Clebsh-Gordan

En general, la representación $\mathbf{D}^{(a)\otimes(b)}$ es reducible, incluso si $\mathbf{D}^{(a)}$ y $\mathbf{D}^{(b)}$ son irreducibles.

Por ejemplo, en D_3 la representación $\mathbf{D}^{(3\otimes 3)}$ debe ser reducible, puesto que es $2 \times 2 = 4$ -dimensional, y no existen representaciones irreducibles de esa dimensión.

Supongamos que $\mathbf{D}^{(a)} \otimes \mathbf{D}^{(b)}$ es reducible (y por tanto, totalmente reducible). Entonces, podemos escribir en general su descomposición en la base irreducible como

$$\mathbf{D}^{(a)} \otimes \mathbf{D}^{(b)} = \sum_{\oplus c} n_c^{ab} \mathbf{D}^{(c)}. \quad (8.94)$$

El miembro de la derecha define la *Serie de Clebsch-Gordan* para $\mathbf{D}^{(a)} \otimes \mathbf{D}^{(b)}$.

Los coeficientes de la serie de Clebsch-Gordan, n_c^{ab} se deducen en la forma habitual

$$n_c^{ab} = \langle \chi^{(c)} | \chi^{(a\otimes b)} \rangle = \langle \chi^{(c)} | \chi^{(a)} \chi^{(b)} \rangle \quad (8.95)$$

que, en el caso de grupos finitos, se escribe

$$n_c^{ab} = \frac{1}{\mathcal{O}(G)} \sum_g \chi^{(c)*}(g) \chi^{(a)}(g) \chi^{(b)}(g). \quad (8.96)$$

mientras que en el caso de grupos contínuos compactos

$$n_c^{ab} = \int_G d\mu(g) \chi^{(c)*}(g) \chi^{(a)}(g) \chi^{(b)}(g). \quad (8.97)$$

Por tanto, en estos casos, la serie de Clebsch-Gordan está determinada unívocamente por los caracteres de las representaciones involucradas.

8.6.2.1 Los coeficientes n_c^{ab} satisfacen algunas ligaduras que son útiles a la hora de calcularlos. Por ejemplo, particularizando para el caso del elemento identidad $g = e$, encontramos, como la dimensión de $D^{(a)} \otimes D^{(b)}$ es $d_a d_b$

$$d_a d_b = \sum_c n_c^{ab} d_c.$$

Capítulo 9

Grupos de Lie

9.1. Definición y Ejemplos

Hasta ahora hemos estudiado algunas propiedades genéricas de los grupos, y otras que hacen referencia a los grupos finitos. Entre los grupos no-finitos, aun debemos hacer distinción entre aquellos que son discretos, y cuyos elementos son numerables, y los continuos.

9.1.1. Grupos Continuos y Grupos de Lie

En los grupos continuos, los elementos pueden parametrizarse en un entorno de cualquier punto mediante un conjunto de variables reales. Escribiremos entonces para un elemento genérico $g(x_1, x_2, \dots, x_d) = g(\mathbf{x})$, y si d es el número mínimos de parámetros necesarios para alcanzar cualquier elemento, hablamos de un grupo de *dimensión d* .

9.1.1.1 Es evidente que no podemos escribir una tabla de multiplicar en el mismo sentido que para un grupo finito. Si el producto de $g(\mathbf{x})$ por $g(\mathbf{y})$ es $g(\mathbf{z})$, esto es

$$g(x_1, x_2, \dots, x_d)g(y_1, y_2, \dots, y_d) = g(z_1, z_2, \dots, z_d), \quad (9.1)$$

entonces los parámetros z_1, z_2, \dots, z_d son funciones de los parámetros $x_1, x_2, \dots, x_d, y_1, y_2, \dots, y_d$. Es decir, la tabla de multiplicación consta de n funciones reales de $2d$ argumentos $z_i = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $i = 1, \dots, d$.

Las propiedades que definen un grupo imponen restricciones sobre las posibles funciones f_i . La más severa es la que proviene de la asociatividad

$$(g(\mathbf{x})g(\mathbf{y}))g(\mathbf{z}) = g(\mathbf{x})(g(\mathbf{y})g(\mathbf{z}))$$

que expresado en términos de las funciones f_i debe ser

$$f_i(\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{z}) = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{z}))$$

válida para todos los valores de x, y, z .

Definición 9.1.1 *Un Grupo de Lie es un grupo continuo, en el cual las funciones f_i que expresan la multiplicación, a parte de satisfacer los requisitos que provienen de las propiedades del grupo, son C^∞ (continuas e infinitamente derivables).*

9.1.2. Ejemplos de Grupos de Lie

- **Grupo general lineal $GL(N)$:**

El grupo general lineal complejo, $GL(N, \mathbb{C})$ es el ejemplo más importante de grupo de Lie, y ya ha sido mencionado antes, al introducir las representaciones. Está formado por todas las matrices complejas e invertibles de dimensión $N \times N$. Es por tanto un grupo de dimensión real $d = 2N^2$, ya que cada elemento está especificado por un conjunto de N^2 coordenadas complejas (que no son otras que las componentes $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{NN}) \in \mathbb{C}^2 / \det(a_{ij}) \neq 0$.)

Es evidente que cada elemento de $GL(N, \mathbb{C})$ es la representación matricial de un operador lineal actuando sobre el espacio vectorial V de dimensión compleja N , en una determinada base. Llamamos a este grupo $GL(V)$, grupo general lineal complejo, el grupo de operadores lineales biyectivos sobre V . Sin embargo, conocido el isomorfismo entre ambos grupos, no haremos distinción explícita entre operadores lineales y su representación matricial.

9.1.2.1 La mayoría de los demás grupos de Lie que encuentran aplicación en física pueden definirse como subgrupo de $GL(N, \mathbb{C})$. El método general para definir subgrupos consiste en imponer cierta condición sobre las matrices de este grupo.

El ejemplo más sencillo es la condición de realidad de las matrices, que define el grupo general lineal real, $GL(N, \mathbb{R})$. Es un grupo de dimensión real N^2 .

- **Grupo especial lineal: $SL(N)$**

$SL(N, \mathbb{C})$. Se define como el conjunto de matrices $M \in GL(N, \mathbb{C})$ tales que $\det M = 1$. Esta condición es una ecuación compleja que reduce el número de parámetros, y por tanto la dimensión real a $2(N^2 - 1)$. Por su parte, la versión real, $SL(N, \mathbb{R})$ se define igual, y tiene dimensión real $N^2 - 1$.

- **Grupo unitario: $U(N)$**

El grupo unitario se define como el subgrupo de $GL(N, \mathbb{C})$ formado por matrices unitarias: $U \in GL(N, \mathbb{C}) \mid U^+U = UU^+ = 1$.

Es elemental comprobar que este conjunto satisface todos los axiomas que definen un grupo. La condición de unitariedad es un conjunto de $\frac{1}{2}N(N + 1)$ ecuaciones reales y $\frac{1}{2}N(N - 1)$ imaginarias. En total N^2 condiciones que restadas a los $2N^2$ grados de libertad iniciales nos dicen que las $U(N)$ viene parametrizado por N^2 parámetros reales.

- **Grupo especial unitario: $SU(N)$**

Este grupo es una especialización del grupo unitario, sometido a la condición adicional de que el determinante sea igual a 1:

$$SU(N) = \{U \in U(N) \mid \det U = 1\}.$$

Las matrices de $U(N)$ tienen por determinante un número complejo de módulo unidad, ya que $1 = \det(U^+U) = (\det U)^* \det U$. Por tanto la condición adicional que define los elementos de $SU(N)$ reduce sólo un grado de libertad. En resumen, la dimensión real de $SU(N)$ es $N^2 - 1$.

- **Grupo ortogonal: $O(N)$**

Se define como el subgrupo de $GL(N, \mathbb{R})$ formado por matrices ortogonales

$$O(N) = \{O \in GL(N, \mathbb{R}) \mid O^t O = 1\}.$$

Análogamente se podría haber definido como el subgrupo de matrices reales pertenecientes a $U(N)$: $O(N) = U(N) \cap GL(N, \mathbb{R})$.

Las matrices de $GL(N, \mathbb{R})$ tienen N^2 grados de libertad, y la condición $O^t O = O O^t = 1$ es un sistema de N^2 ecuaciones con simetría bajo transposición, por tanto $\frac{1}{2}N(N+1)$ ecuaciones independientes. La dimensión real es igual a $\frac{1}{2}N(N-1)$.

Las matrices de $O(N)$ tienen determinante real y módulo unidad. Por tanto sólo puede valer ± 1 .

■ **Grupo especial ortogonal: $SO(N)$**

Es el subgrupo de matrices pertenecientes a $O(N)$ cuyo determinante vale exactamente $+1$, $SO(N) = O(N) \cap SL(N, \mathbb{R})$. El número de parámetros es exactamente el mismo que el de $O(N)$ es decir, $\frac{1}{2}N(N-1)$.

A este grupo pertenecen las rotaciones. Para $N = 3$ encontramos que tiene 3 parámetros, que pueden ser los tres ángulos de Euler o cualquier combinación de ellos.

■ **Grupo simpléctico $Sp(N)$** Sea J la siguiente matriz de dimensión $2N \times 2N$:

$$\begin{pmatrix} 0_{N \times N} & 1_{N \times N} \\ -1_{N \times N} & 0_{N \times N} \end{pmatrix}$$

Definimos el grupo simpléctico el conjunto de todas aquellas matrices $S \in GL(2N, \mathbb{R})$ que satisfacen la condición

$$S^t J S = J$$

El sistema de ecuaciones que implica esta igualdad forma un conjunto antisimétrico tanto en la parte real como en la imaginaria. Por tanto tenemos que la dimensión será $2N^2 - 2(\frac{1}{2}N(N-1)) = N(N+1)$.

■ **Grupo pseudo-ortogonal $O(M, N)$** Sea la matriz diagonal de dimensión $d = M + N$

$$\eta = \text{diag}(\overbrace{-1, -1, \dots, -1}^M, \overbrace{1, 1, \dots, 1}^N).$$

Definimos el grupo pseudo-ortogonal $SO(M, N)$ como aquel subgrupo de matrices $\Lambda \in GL(d = M + N, \mathbb{R})$ que satisface la condición adicional

$$\Lambda^t \eta \Lambda = \eta.$$

Este conjunto de ecuaciones presenta simetría bajo transposición y por tanto implica $\frac{1}{2}d(d+1)$ ecuaciones independientes. En consecuencia $SO(M, N)$ tiene dimensión $\frac{1}{2}d(d-1)$.

Obsérvese que para $M = 0$ ó $N = 0$ recuperamos la definición de $O(d) = O(d = M, 0) = O(0, d = N)$. Por tanto el grupo pseudo-ortogonal es una generalización del grupo ortogonal. Además sus elementos también tienen determinante igual a ± 1 .

■ **Grupo pseudo-ortogonal especial $SO(M, N)$**

Se define a partir de $O(M, N)$, y contiene sólo aquellos elementos que tiene determinante igual a $+1$.

■ **Grupo de Galileo**

Como sabemos los sistemas llamados inerciales, es aquel subconjunto de sistemas de referencia (x, y, z, t) para el cual es válida la Segunda Ley de Newton en la forma $\vec{F} = m\vec{a}$. Las transformaciones de coordenadas que relacionan estos sistemas inerciales entre sí forman el llamado grupo de Galileo. Dos de estos sistemas, de ser distintos, difieren a lo sumo en una rotación fija (una matriz de $SO(3)$) y una traslación del origen con una velocidad uniforme:

$$\vec{r}' = R\vec{r} + \vec{v}t$$

$$t' = t. \quad (9.2)$$

En notación matricial tenemos que podemos expresar un elemento de este grupo mediante una matriz de la forma

$$G(\vec{n}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} R(\vec{n}) & \vec{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.3)$$

donde \vec{n} y \vec{v} son 6 parámetros que especifican la rotación de ejes, y la velocidad relativa respectivamente. R es una matriz de $SO(3)$.

Ejercicio 9.1.1 Para cada uno de los ejemplos anteriores, verificar que se cumplen todos los axiomas que definen un grupo.

9.1.3. Los grupos $O(2)$ y $SO(2)$

$O(2)$ es el grupo formado por las matrices reales ortogonales de dimensión 2. Sea $O \in O(2)$. $SO(2)$ es el subgrupo formado por aquellas matrices para las cuales $\det O = +1$. Sea

$$O = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (9.4)$$

La condición de ortogonalidad $O^t O = O O^t = 1$ impone las siguientes ecuaciones

$$a^2 + b^2 = a^2 + c^2 = c^2 + d^2 = b^2 + d^2 = 1 \quad (9.5)$$

$$ac + db = ab + dc = 0. \quad (9.6)$$

Las ecuaciones 9.5 implican que $a^2 = d^2$ y $b^2 = c^2$, de modo que sólo encontramos dos conjuntos de soluciones para 9.6:

O_+ ; $a = d$ y $b = -c$. En este caso $\det O = +1$ y $O \in SO(2)$. Los elementos de este conjunto se denominan, *rotaciones propias*.

O_- ; $a = -d$ y $b = c$, en cuyo caso $\det O = -1$. Los elementos de este conjunto se denominan, *rotaciones impropias*.

9.1.3.1 Podemos parametrizar las matrices del conjunto O_+ mediante un sólo parámetro $-\pi \leq \theta < \pi$ en la forma

$$R_+(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sen \theta \\ -\sen \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (9.7)$$

Este conjunto contiene el elemento identidad cuando $\theta = 0$. Por su parte el conjunto O_- no contiene la identidad. A partir de un elemento arbitrario del conjunto O_+ podemos obtener otro, R_- , perteneciente a O_- multiplicándolo por una matriz de reflexión sobre un eje

$$R_-(\theta) = I \cdot R_+(\theta) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sen \theta \\ -\sen \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (9.8)$$

9.1.4. Los grupos $U(1)$, $U(2)$ y $SU(2)$

$U(1)$ es el conjunto de números complejos con módulo unidad. Por tanto podemos parametrizarlos con un sólo ángulo

$$g(\theta) = e^{i\theta}. \quad (9.9)$$

Es evidente el isomorfismo que existe entre los grupos $SO(2)$ y $U(1)$. Mientras que el primero induce rotaciones en el plano real, el segundo lo hace en el plano complejo.

9.1.4.1 $U(2)$ está compuesta por matrices 2×2 unitarias. Por tanto, escribiendo

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad (9.10)$$

las ecuaciones que se siguen de $U^+U = UU^+ = 1$ son

$$\begin{aligned} |\alpha|^2 + |\beta|^2 = |\alpha|^2 + |\gamma|^2 = |\gamma|^2 + |\delta|^2 = |\beta|^2 + |\delta|^2 &= 1 \\ \alpha\gamma^* + \beta\delta^* = \alpha\beta^* + \beta\gamma^* &= 0 \end{aligned} \quad (9.11)$$

es decir

$$|\alpha| = |\delta| ; \quad |\beta| = |\gamma| \quad (9.12)$$

que tienen un conjunto de soluciones parametrizado por una variable real $0 \leq \chi < 2\pi$

$$\begin{aligned} \delta &= \alpha^* e^{i\chi} \\ \gamma &= -\beta^* e^{i\chi} \end{aligned} \quad (9.13)$$

o lo que es igual,

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* e^{i\chi} & \alpha^* e^{i\chi} \end{pmatrix}. \quad (9.14)$$

con $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. El determinante es una fase $\det U = e^{2i\chi}$.

9.1.4.2 $SU(2)$ es el grupo de matrices unitarias 2×2 con determinante unidad. Cualquiera de estas matrices tiene necesariamente la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}. \quad (9.15)$$

donde $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Podemos parametrizar los números α, β mediante los siguientes ángulos

$$\alpha = \cos \theta e^{i\phi}, \quad \beta = \sin \theta e^{-i\psi}. \quad (9.16)$$

donde $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \phi, \psi < 2\pi$. De esta manera

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta e^{i\phi} & \sin \theta e^{i\psi} \\ -\sin \theta e^{-i\psi} & \cos \theta e^{-i\phi} \end{pmatrix}. \quad (9.17)$$

9.2. Estructura Global de los Grupos de Lie

9.2.1. Subgrupos de Lie

Definición 9.2.1 *Un subconjunto de un grupo de Lie, que es a su vez grupo de Lie, se dice que forma un subgrupo de Lie.*

En el caso de grupos finitos, vimos un criterio muy sencillo para identificar subgrupos. Bastaba con verificar que para cualesquiera dos $h, h' \in H \subset G$, también el producto $hh' \in H$.

Daremos a continuación, un criterio más potente para verificar cuando un subconjunto de elementos es un subgrupo de Lie.

Teorema 9.2.1 *Sea S es un subconjunto de G , tal que, para cualesquiera dos elementos $s, s' \in S$ se verifica $s's^{-1} \in S$, entonces S es un subgrupo de G .*

Demostración: El axioma de asociatividad se verifica para cualquier subconjunto de elementos de G , y por tanto no necesita verificación. El axioma **III** sobre la existencia de elemento neutro se verifica particularizando para $s' = s$, con lo que $s's^{-1} = ss^{-1} = e$. El axioma **IV** sobre la existencia del elemento inverso se sigue poniendo, ahora que sabemos que existe, $s'=e$. Con esto, $s's^{-1} = s^{-1} \in S$. Por último, como $s^{-1} \in S$, $s'(s^{-1})^{-1} = s's \in S$, $\forall s', s$ con lo que hemos verificado el axioma de cierre **I**. ■

9.2.2. Componentes Conexas de un Grupo de Lie

Definición 9.2.2 *Componente conexa de un grupo de Lie, G , es el conjunto maximal de elementos $\{g\} \subset G$, que pueden ser relacionados mediante una variación continua de las variables x^1, \dots, x^d que parametrizan el grupo.*

Ejemplos

- (i) *El grupo multiplicativo de números reales.* En este grupo no está el número 0, porque no tiene inverso. En consecuencia, la recta real se divide en dos componentes conexas $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ y $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} | x < 0\}$.
- (ii) *Los grupos $O(N)$ y $SO(N)$.* Ya mencionamos anteriormente que los elementos de $O(N)$ son matrices reales ortogonales. Este conjunto se divide dos subconjuntos disconexos, formados por aquellas matrices cuyo determinante es igual a +1 y aquellas otras con determinante igual a -1. Evidentemente no es posible mediante una deformación continua de los parámetros pasar de una situación a la otra. Es posible mostrar que cada uno de estos subconjunto es una componente conexa de $O(N)$. De hecho $SO(N)$ no es otra que la componente conexa que contiene a la identidad $e = 1$, ya que $\det(1) = +1$.

Teorema 9.2.2 *La componente conexa con al identidad forma por sí misma un grupo de Lie que se denomina el “subgrupo conexo”.*

9.2.3. Grupos de Lie Compactos y No-Compactos

En \mathbb{R}^n un subconjunto de puntos es compacto si y sólo si es cerrado y acotado. Este criterio se transporta a los grupos de Lie en la siguiente manera:

Definición 9.2.3 *Un grupo de Lie de dimensión N , con un número finito de componentes conexas, es compacto, si y sólo si existe un conjunto de variables y_1, \dots, y_n que parametrizan este grupo completamente, y que varían dentro de intervalos cerrados y acotados $a_i \leq y_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n$.*

9.2.3.1 En los casos de interés físico que hemos enunciado en la lista de ejemplo del punto 9.1.1, los grupos compactos son aquellos en los que los elementos de matriz no alcanzan valores arbitrariamente altos. Por el contrario, en los no compactos algunos elementos de matriz no encuentran ninguna cota.

Entre los ejemplos no-compactos, el más evidente es $GL(N)$. Otro ejemplo evidente es el grupo de Galileo. Esto es debido a que no hay restricción física sobre los valores de la velocidad relativa \vec{v} entre dos sistemas de referencia inerciales. Como veremos al estudiar en detalle los grupos $SL(N)$ y $SO(N, M)$, estos son no-compactos.

Entre los ejemplos de grupos compactos tenemos $O(N)$, $SO(N)$, $U(N)$ y $SU(N)$, como demostraremos también en su momento.

9.2.3.2 El interés de los grupos compactos radica en que para ellos es posible definir un análogo de la *suma sobre los elementos del grupo* que tan importantes resultados ha permitido demostrar en el caso de grupos finitos, especialmente en relación con la teoría de representaciones. Sin entrar en mayores detalles, la sustitución

$$\sum_{g \in G} \Leftrightarrow \int_G d\mu(g)$$

permite extender, intactos, todos los teoremas demostrados en el capítulo 8 al caso de grupos de Lie compactos.

9.3. Estructura Local de los Grupos de Lie

9.3.1. Algebras de Lie

Definición 9.3.1 Un “álgebra de Lie real” \mathcal{L} de dimensión $d \geq 1$, es un espacio vectorial real de dimensión d , dotado de una operación interna llamada “corchete de Lie”, $[\cdot, \cdot] : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$, definida para todo par $u, v \in \mathcal{L}$, y que satisface las siguientes propiedades

- (i) $[u, v] \in \mathcal{L}$ para todo $u, v \in \mathcal{L}$.
- (ii) (antisimetría), $[u, v] = -[v, u]$.
- (iii) (linealidad), $[\alpha u + \beta v, w] = \alpha[u, w] + \beta[v, w]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- (iv) (Identidad de Jacobi), $[u, [v, w]] + [w, [u, v]] + [v, [w, u]] = 0$.

9.3.1.1 Dada una base L_1, \dots, L_d para un álgebra de Lie de dimensión d , las relaciones de conmutación $[L_i, L_j], i, j = 1, \dots, d$ determinan las de cualquier par de elementos L, M por linealidad. En consecuencia, un álgebra de Lie viene especificada por un conjunto de d^3 números f^k_{ij} denominados: “constantes de estructura respecto a la base $\{L_i\} i = 1, \dots, d$, que se definen según la siguiente expresión

$$[L_i, L_j] = \sum_{k=1}^d f^k_{ij} L_k, \quad i, j = 1, \dots, d. \quad (9.18)$$

Estos números no son independientes, como se deduce de las propiedades (i) y (iv) que definen el corchete de Lie. Por el contrario verifican

$$(i) \rightarrow f^k_{ij} = -f^k_{ji} \quad (9.19)$$

$$(iv) \rightarrow f^m_{lk} f^k_{ij} + f^m_{ik} f^k_{jl} + f^m_{jk} f^k_{li} = 0. \quad (9.20)$$

9.3.1.2 Frente a cambios de base $\{L_i \rightarrow \tilde{L}_i\} i = 1, \dots, d$ las constantes de estructura se transforman como las componentes de un tensor de rango $\binom{1}{2}$. Es decir si O especifica el cambio $L'_{j'} = O^i_{j'} L_i$, entonces

$$f'^{k'}_{i'j'} = O^{-1k'}_{k} f^k_{ij} O^i_{i'} O^j_{j'}$$

9.3.2. El mapa exponencial

Teorema 9.3.1 *A cada grupo de Lie matricial, G , de dimensión d (como variedad) le corresponde una única álgebra de Lie \mathcal{G} de la misma dimensión (como espacio vectorial). Todo elemento de un grupo de Lie, perteneciente a la componente conexa con la identidad, puede ser expresado como la exponencial de algún elemento de su álgebra de Lie \mathcal{G} .*

$$g = e^L$$

De las condiciones que definen un elemento $g \in G$ podemos deducir las análogas que definen las matrices $L \in \mathcal{G}$. Por ejemplo, sea $g \in SO(N)$, si $g = e^L$ entonces $g^{-1} = e^{-L}$ mientras que $g^t = e^{L^t}$. Identificando obtenemos que el álgebra $so(2)$ está generada por matrices reales antisimétricas $L^t = -L$. Automáticamente tienen traza nula, de donde se sigue, utilizando la expresión $\det \exp L = \exp \operatorname{tr} L$ que $\det g = 1$ como corresponde a un elemento de $SO(N)$.

G	Condiciones sobre $g \in G$	\mathcal{G}	Condiciones sobre $L \in \mathcal{G}$	d
$GL(N, \mathbb{C})$	—	$gl(N, \mathbb{C})$	—	$2N^2$
$GL(N, \mathbb{R})$	g real	$gl(N, \mathbb{R})$	L real	N^2
$SL(N, \mathbb{C})$	$\det g = +1$	$sl(N, \mathbb{C})$	$\operatorname{tr} L = 0$	$2N^2 - 2$
$SL(N, \mathbb{R})$	g real; $\det g = +1$	$sl(N, \mathbb{R})$	L real; $\operatorname{tr} L = 0$	$N^2 - 1$
$U(N)$	$g^+ = g^{-1}$	$u(N)$	$L^+ = -L$	N^2
$SU(N)$	$g^+ = g^{-1}$; $\det g = +1$	$su(N)$	$L^+ = -L$; $\operatorname{tr} L = 0$	$N^2 - 1$
$O(N)$	$g^t = g^{-1}$; g real	$so(N)$	$L^+ = -L$; L real	$\frac{1}{2}N(N-1)$
$SO(N)$	$g^t = g^{-1}$; g real; $\det g = +1$	„	„	„
$O(p, q)$	$g^t \eta = \eta g^{-1}$; g real	$so(p, q)$	$(\eta L)^t = -\eta L$, L real	$\frac{1}{2}N(N-1)$, $N = p + q$
$SO(p, q)$	$g^t \eta = \eta g^{-1}$; g real, $\det g = 1$	„	„	„

(9.21)

9.3.2.1

Sin embargo, como el álgebra de Lie sólo da cuenta de la estructura del grupo en el entorno de la identidad, varios grupos de Lie pueden compartir el mismo álgebra, encontrándose entonces que se diferencian en la estructura global.

9.3.2.2 Ejemplo:

$so(2)$ es unidimensional, y por base podemos tomar

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.22)$$

Un elemento genérico de $so(2)$ será θL , $\theta \in \mathbb{R}$. Entonces un elemento genérico de $SO(2)$ será $g(\theta) \exp \theta L$. para evaluar esta exponencial es útil la siguiente observación: $L^2 = -1$ lo cual nos permite evaluar la expansión

$$\begin{aligned} g(\theta) &= e^{\theta L} \\ &= 1 + \theta L + \frac{1}{2}\theta^2 L^2 + \frac{1}{3!}\theta^3 L^3 + \frac{1}{4!}\theta L^4 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\theta^{2n} + \dots\right)1 \\
&\quad + \left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\theta^{2n+1} + \dots\right)L \\
&= \cos \theta \, 1 + \operatorname{sen} \theta L \\
&= \begin{pmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \tag{9.23}
\end{aligned}$$

9.4. Representaciones de Grupos de Lie y Algebras de Lie

En principio, la definición de representación para grupos de Lie en nada difiere de la que dimos en el capítulo anterior. Sin embargo, aun se puede refinar un poco para distinguir aquellas representaciones que poseen un comportamiento analítico razonable:

Definición 9.4.1 Una “representación analítica” de un grupo de Lie G , es una representación $\mathbf{D}(g) \in \operatorname{Aut}(V)$, que verifica que $\forall g(x_1, \dots, x_d)$ en una vecindad de la identidad, los elementos matriz $D_{\alpha\beta}(g(x_1, \dots, x_d))$ son funciones analíticas de x_1, \dots, x_d .

9.4.1. Representaciones de Algebras de Lie

Definición 9.4.2 Sea \mathcal{L} un álgebra de Lie abstracta. Una representación lineal m -dimensional de \mathcal{L} es un homomorfismo lineal del álgebra sobre el conjunto de operadores lineales definidos sobre un espacio vectorial V de dimensión m .

Por tanto, una representación, asigna a cada elemento $L \in \mathcal{L}$ un operador lineal $\mathcal{D}(L)$ con la propiedad de que dados dos elementos L, M esta asignación verifica

- (i) Linealidad: $\mathcal{D}(\alpha L + \beta M) = \alpha \mathcal{D}(L) + \beta \mathcal{D}(M)$.
- (ii) Homomorfismo: $\mathcal{D}([L, M]) = [\mathcal{D}(L), \mathcal{D}(M)]$.

9.4.1.1 En una base arbitraria (que tomaremos ortonormal), la representación asigna a cada elemento del álgebra una matriz m dimensional, $\mathcal{D}(L)_{\alpha\beta}$.

Algunas nociones, como la *equivalencia de representaciones*, o la *reducibilidad* se definen de forma totalmente análoga como para los grupos. La ventaja es que en el caso presente la linealidad simplifica enormemente el análisis.

Así por ejemplo, para saber si una representación es reducible, totalmente reducible o irreducible, basta con saber si adopta la forma correspondiente a cada caso para todos los elementos de una base del álgebra de Lie.

9.4.1.2 Los dos lemas de Schur se formulan exactamente de la misma forma que en el caso de grupos, pero poniendo $\forall L \in \mathcal{L}$ donde decía $\forall g \in G$.

Un álgebra de Lie abeliana es aquella para la cual $[L, M] = 0$ para todo $L, M \in \mathcal{L}$. Un corolario inmediato de los lemas de Schur, aplicado a álgebras de Lie es el siguiente

Corolario 9.4.1 Toda representación irreducible de un álgebra de Lie abeliana es unidimensional.

9.5. Conexión entre $D(g)$ y $\mathcal{D}(L)$.

En principio, para todos los grupos matriciales ya conocemos una representación, puesto que los elementos mismos se definen como automorfismos de un espacio vectorial. La conexión entre el álgebra y el grupo viene dada por el mapa exponencial, y por la derivada en el origen. Esta conexión, siendo cierta para una representación, vamos a ver que se extiende a todas las representaciones analíticas.

Teorema 9.5.1 *sea D una representación m -dimensional de un grupo de Lie lineal G , cuya álgebra de Lie real es \mathcal{G} .*

(i) *Existe una representación m -dimensional \mathcal{D} , definida para todo elemento $L \in \mathcal{G}$ mediante*

$$\mathcal{D}(L) = \left. \frac{d}{dt} D(e^{tL}) \right|_{t=0}. \quad (9.24)$$

(ii) *Para todo $L \in \mathcal{G}$ y todo $t \in \mathbb{R}$*

$$e^{t\mathcal{D}(L)} = D(e^{tL}). \quad (9.25)$$

(iii) *Si D es reducible (completamente reducible) entonces \mathcal{D} es reducible (completamente reducible). El contrario es cierto sólo si G es conexo.*

(iv) *Si G es conexo, D es irreducible si y sólo si \mathcal{D} es irreducible.*

(v) *Si D es una representación unitaria, entonces \mathcal{D} es anti-Hermítica. El enunciado contrario es cierto si G es conexo.*

9.5.0.3 Es muy importante notar que este teorema implica que toda representación de un grupo da lugar a una representación de un álgebra, mientras que la implicación inversa no es cierta en general. El punto esencial es que, mientras que las matrices $e^{t\mathcal{D}(L)}$ están bien definidas en general para cualquier $L \in \mathcal{G}$ y $t \in \mathbb{R}$, no necesariamente forman una representación del grupo G . Veremos una demostración de este hecho en el caso de las representaciones de “espín” semientero del álgebra $so(3)$.

9.5.0.4 El punto (iii) del teorema 9.5.1 contiene la afirmación de que si $\mathbf{D}^{(a)} \oplus \mathbf{D}^{(b)}$ es una representación del grupo G , la representación correspondiente del álgebra será $\mathcal{D}^{(a)} \oplus \mathcal{D}^{(b)}$, en notación evidente.

9.5.0.5 Más interesante es saber qué representación del álgebra corresponde, a través de la identificación 9.24, a la representación $\mathbf{D}^{(a)} \otimes \mathbf{D}^{(b)}$.

Para evitar una profusión de índices trabajaremos con las aplicaciones lineales abstractas $\mathbf{D}^{(a)}(g)$ y $\mathbf{D}^{(b)}(g)$ del grupo, y $\mathcal{D}^{(a)}(L)$ y $\mathcal{D}^{(b)}(L)$ del álgebra. Entonces a la representación $\mathbf{D}^{(a \otimes b)}(g) = \mathbf{D}^{(a)}(g) \otimes \mathbf{D}^{(b)}(g)$ le corresponde $\mathcal{D}^{(a \otimes b)}(L)$ mediante la identificación

$$\mathcal{D}^{(a \otimes b)}(L) = \left. \frac{d}{dt} \mathbf{D}^{(a \otimes b)}(e^{tL}) \right|_{t=0} \quad (9.26)$$

Si consideramos la actuación de un operador como el anterior, sobre un elemento arbitrario $\mathbf{v}_a \otimes \mathbf{v}_b$ del espacio $V^{(a)} \otimes V^{(b)}$ encontramos

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(a \otimes b)}(L) (|\mathbf{v}_a\rangle \otimes |\mathbf{v}_b\rangle) &= \left. \frac{d}{dt} \mathbf{D}^{(a \otimes b)}(e^{tL}) \right|_{t=0} (|\mathbf{v}_a\rangle \otimes |\mathbf{v}_b\rangle) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \left(\mathbf{D}^{(a)}(e^{tL}) |\mathbf{v}_a\rangle \otimes \mathbf{D}^{(b)}(e^{tL}) |\mathbf{v}_b\rangle \right) \right|_{t=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{D}^{(a)}(L)|\mathbf{v}_a\rangle \otimes |\mathbf{v}_b\rangle + |\mathbf{v}_a\rangle \otimes \mathcal{D}^{(b)}(L)|\mathbf{v}_b\rangle \\
&= (\mathcal{D}^{(a)}(L) \otimes \mathbf{1}_b + \mathbf{1}_a \otimes \mathcal{D}^{(b)}(L))|\mathbf{v}_a\rangle \otimes |\mathbf{v}_b\rangle
\end{aligned} \tag{9.27}$$

9.5.0.6 En conclusión, el operador lineal correspondiente a la representación del álgebra \mathcal{G} sobre el espacio $V^{(a)} \otimes V^{(b)}$ es

$$\mathcal{D}^{(a \otimes b)}(L) = (\mathcal{D}^{(a)}(L) \otimes \mathbf{1}_b + \mathbf{1}_a \otimes \mathcal{D}^{(b)}(L)) \tag{9.28}$$

que en una base dada $|\mathbf{e}_{ik}\rangle \equiv |\mathbf{e}_i^{(a)}\rangle \otimes |\mathbf{e}_k^{(b)}\rangle$ viene expresado por la matriz

$$(\mathcal{D}^{(a)}(L) \otimes \mathbf{1}_b + \mathbf{1}_a \otimes \mathcal{D}^{(b)}(L))_{ik\ jl} = \mathcal{D}^{(a)}(L)_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ij}\mathcal{D}^{(b)}(L)_{kl} \tag{9.29}$$

9.5.0.7 Aunque la demostración ha sido constructiva, no está de más verificar que, de hecho, $\mathcal{D}^{(a \otimes b)}$ constituye una representación. Para ello basta con comprobar que, efectivamente

$$\mathcal{D}^{(a \otimes b)}([L, M]) = [\mathcal{D}^{(a \otimes b)}(L), \mathcal{D}^{(a \otimes b)}(M)]. \tag{9.30}$$

Nótese cómo, si hubiésemos definido el producto tensorial de representaciones de un álgebra al igual que para grupos, no se satisfaría este requisito.

9.5.0.8 En general, sabemos que $\mathbf{D}^{(a \otimes b)}$ es altamente reducible:

$$\mathbf{D}^{(a \otimes b)} = \sum_c n_c^{ab} \mathbf{D}^{(c)}. \tag{9.31}$$

Esto implica que, igualmente

$$\mathcal{D}^{(a \otimes b)} = \sum_c n_c^{ab} \mathcal{D}^{(c)}. \tag{9.32}$$

Por tanto, los coeficientes de la Serie de Clebsh-Gordan, n_c^{ab} , coinciden en la descomposición de representaciones reducibles, ya sean las del grupo o las del álgebra.

Capítulo 10

El Grupo de Rotaciones

10.1. El grupo $O(3)$

Recordemos que $O(3)$ es el conjunto de matrices ortogonales reales 3×3 . Este grupo consta de dos componentes conexas O_+ y O_- , según que el determinante $\det g$ sea igual a $+1$ o a -1 .

10.1.0.9 Dado un elemento $g \in O_+$ podemos obtener otro en O_- mediante la multiplicación de g por algún elemento de O_- . Por ejemplo la reflexión en torno al origen

$$I_S = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}. \quad (10.1)$$

De hecho cualquier elemento de O_- puede escribirse de esta forma, entre las dos componentes existe una biyección. Por tanto vamos a restringir nuestra atención a la construcción de la componente conexa con la identidad, o lo que es igual, a la construcción del grupo $SO(3)$.

10.1.1. El álgebra $so(3)$

Ya hemos visto de qué manera se refleja la condición de ortogonalidad sobre la caracterización del álgebra. Podemos obtener el mismo resultado haciendo uso de la representación exponencial.

Cualquier elemento de O_+ puede escribirse en la forma $g = e^L$, donde L es un elemento del álgebra de Lie $L \in \mathcal{G}$, que podemos expandir en una base $L = \sum_k \theta^k L_k$. Por un lado tenemos que $g^t = e^{L^t}$, y por otro $g^{-1} = e^{-L}$. Identificando ambas expresiones la definición del álgebra $so(3)$ como el conjunto de matrices reales 3×3 antisimétricas, es decir reales y antihermíticas.

Una base para este álgebra la constituye el siguiente conjunto de matrices reales

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (10.2)$$

que pueden ser definidas colectivamente en la forma $(L_i)_{jk} = \epsilon_{ijk}$ ($\epsilon_{123} = 1$) donde ϵ_{ijk} es el símbolo totalmente antisimétrico con tres índices.

Ejercicio 10.1.1 Demuestra que las matrices L_i satisfacen las siguientes reglas de conmutación

$$[L_i, L_j] = -\epsilon_{ijk} L_k. \quad (10.3)$$

Ayuda: $\sum_l \epsilon_{ijl} \epsilon_{lmn} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}$.

El ejercicio anterior muestra que las constantes estructura del álgebra, en la base escogida (10.2), son precisamente $f^i{}_{jk} = -\epsilon_{ijk}$.

10.1.1.1 Un elemento genérico de $so(3)$ es de la forma

$$L(\vec{\theta}) = \vec{\theta} \cdot \vec{L} = \sum_{i=1}^3 \theta^i L_i = \begin{pmatrix} 0 & \theta_3 & -\theta_2 \\ -\theta_3 & 0 & \theta_1 \\ \theta_2 & -\theta_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (10.4)$$

y a partir de él, encontramos un elemento del grupo en la forma $R(\vec{\theta}) = e^{\vec{\theta} \cdot \vec{L}} \in SO(3)$.

De nuevo, a la hora de calcular esta exponencial, es crucial la observación siguiente:

$$(\vec{\theta} \cdot \vec{L})^3 = -|\vec{\theta}|^2 (\vec{\theta} \cdot \vec{L}). \quad (10.5)$$

Entonces

$$\begin{aligned} R(\vec{\theta}) &= e^{\vec{\theta} \cdot \vec{L}} \\ &= 1 + \vec{\theta} \cdot \vec{L} + \frac{1}{2} (\vec{\theta} \cdot \vec{L})^2 + \frac{1}{3!} (\vec{\theta} \cdot \vec{L})^3 + \frac{1}{4!} (\vec{\theta} \cdot \vec{L})^4 + \dots \\ &= 1 + \vec{\theta} \cdot \vec{L} + \frac{1}{2} (\vec{\theta} \cdot \vec{L})^2 - \frac{1}{3!} \theta^2 (\vec{\theta} \cdot \vec{L}) - \frac{1}{4!} \theta^2 (\vec{\theta} \cdot \vec{L})^2 + \dots \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4!} \theta^2 + \dots \right) (\vec{\theta} \cdot \vec{L})^2 + \left(1 - \frac{1}{3!} \theta^2 + \dots \right) (\vec{\theta} \cdot \vec{L}) \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2} \theta^2 - \frac{1}{4!} \theta^4 + \dots \right) \left(\frac{\vec{\theta}}{\theta} \cdot \vec{L} \right)^2 + \left(\theta^2 - \frac{1}{3!} \theta^4 + \dots \right) \left(\frac{\vec{\theta}}{\theta} \cdot \vec{L} \right) \\ &= 1 + (1 - \cos \theta) \left(\frac{\vec{\theta}}{\theta} \cdot \vec{L} \right)^2 + \text{sen } \theta \left(\frac{\vec{\theta}}{\theta} \cdot \vec{L} \right) \\ &= 1 + (1 - \cos \theta) (\vec{n} \cdot \vec{L})^2 + \text{sen } \theta (\vec{n} \cdot \vec{L}) \quad (10.6) \\ &= \begin{pmatrix} n_1^2 + \cos \theta (1 - n_1^2) & n_1 n_2 \cos \theta + n_3 \text{sen } \theta & n_1 n_3 \cos \theta - n_2 \text{sen } \theta \\ n_1 n_2 \cos \theta - n_3 \text{sen } \theta & n_2^2 + \cos \theta (1 - n_2^2) & n_2 n_3 \cos \theta + n_1 \text{sen } \theta \\ n_1 n_3 \cos \theta + n_2 \text{sen } \theta & n_2 n_3 \cos \theta - n_1 \text{sen } \theta & n_3^2 + \cos \theta (1 - n_3^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde hemos definido un vector unitario mediante $\vec{\theta} = \theta \vec{n}$. Análogamente usaremos la notación $R_{\vec{n}}(\theta) = R(\vec{\theta})$ de forma intercambiable.

10.1.1.2 Interpretación Geométrica de \vec{w}

Para dar una interpretación geométrica a los parámetros $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, es conveniente fijarnos en algunos casos particulares. Por ejemplo, tomemos $\vec{\theta} = (\theta_1, 0, 0)$. En este caso, la expresión (10.6) se reduce a

$$R(\theta_1, 0, 0) = 1 + (1 - \cos \theta_1) (L_1)^2 + (\text{sen } \theta_1) L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & \text{sen } \theta_1 \\ 0 & -\text{sen } \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix}. \quad (10.7)$$

De idéntica manera obtenemos un resultado muy sencillo para $R(0, \theta_2, 0)$ y para $R(0, 0, \theta_3)$:

$$R(0, \theta_2, 0) = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \text{sen } \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen } \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}; \quad R(0, 0, \theta_3) = \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & \text{sen } \theta_3 & 0 \\ -\text{sen } \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

En resumen, al menos para estos tres casos, vemos que el vector $\vec{\theta}$ parametriza una rotación finita de ángulo $\theta = |\vec{\theta}|$ alrededor de un eje marcado por la dirección del vector unitario $\vec{\theta}/\theta$.

Este es también el caso genérico. En efecto, dado $\vec{\theta}$, mediante un cambio de base podemos hacer que este vector coincida con alguno de los tres ejes coordenados, y en esta base la matriz R tiene el significado que hemos encontrado en el párrafo anterior.

En conclusión, las matrices de $SO(3)$ $R(\vec{\theta})$ son rotaciones de ángulo θ en torno al eje que señala el vector \vec{n} en el espacio euclídeo tridimensional. Todos los elementos de $SO(3)$ pueden parametrizarse en términos de $\vec{\theta} = \theta\vec{n}$ con $-\pi < \theta \leq \pi$, y \vec{n} en el hemisferio norte.

10.1.1.3 Parametrización mediante ángulos de Euler

La parametrización de Euler realiza una rotación genérica mediante una superposición de tres rotaciones sucesivas: θ en torno al eje x^3 , a continuación ϕ en torno al eje x^1 , y finalmente ψ en torno al eje x^3 de nuevo. Es decir

$$\begin{aligned} R(\psi, \theta, \phi) &= e^{\psi L_3} e^{\theta L_1} e^{\phi L_3} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi & \text{sen } \psi & 0 \\ -\text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta \\ 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \text{sen } \phi & 0 \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \text{sen } \psi \text{sen } \phi \cos \theta & \cos \psi \text{sen } \phi + \text{sen } \psi \cos \phi \cos \theta & \text{sen } \psi \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \psi \cos \phi - \cos \psi \text{sen } \phi \cos \theta & -\text{sen } \psi \text{sen } \phi + \cos \psi \cos \phi \cos \theta & \cos \psi \text{sen } \theta \\ \text{sen } \phi \text{sen } \theta & -\cos \phi \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

10.1.2. Generadores Hermíticos

Los operadores hermíticos juegan un papel fundamental en el contexto de la Mecánica Cuántica, donde se denominan “observables”. Sus autovalores son reales y constituyen magnitudes medibles experimentalmente.

Por este motivo es muy frecuente el uso de una base de operadores hermíticos para el álgebra. ¿Cómo se consigue esto? Evidentemente, si a partir de un operador L parametrizamos un elemento del grupo en la forma $g(t) = e^{itH}$, donde hemos introducido un factor i en el exponente, tenemos que si $g(t)$ es una matriz unitaria, iH debe ser antihermítica y, por tanto, H hermítica. De esta forma, si en lugar de L_i , $i = 1, 2, 3$ consideramos los generadores $J_i = \frac{\hbar}{i} L_i$ encontramos que el álgebra que satisfacen estos nuevos generadores es

$$[J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k. \quad (10.8)$$

que es la forma estandar para las relaciones de conmutación de los operadores de “momento angular.” en Mecánica Cuántica. En adelante usaremos $\hbar = 1$ mediante la elección de un sistema adecuado de unidades.

10.2. El grupo $SU(2)$

Por definición, este es el grupo de matrices unitarias 2×2 , con determinante unidad. Su dimensión es 3 al igual que la de $SO(3)$. Sin embargo no es esta la única semejanza que se da entre los dos grupos, y la estrecha relación que existe entre ambos es el motivo de que los hayamos incluido en el mismo capítulo. De hecho, ciertas partículas, como el electrón, exhiben grados de libertad, denominados *espín*, que se transforman frente a las rotaciones del espacio como representaciones del grupo $SU(2)$.

10.2.1. El álgebra $su(2)$

El álgebra $su(2)$ es el espacio vectorial de matrices 2×2 antihermíticas y sin traza. Una base de dicho espacio la constituyen las matrices siguientes

$$L_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad L_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}. \quad (10.9)$$

que satisfacen las reglas de conmutación $[L_i, L_j] = -\epsilon_{ijk} L_k$.

Encontramos así que con esta definición, las constantes de estructura son de nuevo $f^i_{jk} = -\epsilon_{ijk}$. En otras palabras, las álgebras reales $so(3)$ y $su(2)$ son isomorfas.

Al igual que en la sección anterior, podemos considerar igualmente una base de operadores hermíticos $\sigma_i = -2iL_i$ $i = 1, 2, 3$ donde σ_i son las matrices de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (10.10)$$

que satisfacen $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$, además de $\sigma_i^2 = I$ y $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}I$. Todas estas propiedades se pueden condensar en la identidad

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k. \quad (10.11)$$

Los generadores hermíticos usados convencionalmente en Mecánica Cuántica son $J_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i = -i\hbar L_i$, por tanto:

$$J_1 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_2 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad J_3 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (10.12)$$

y que verifican por suparte

$$[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k \quad (10.13)$$

10.2.1.1 De nuevo, un elemento arbitrario de $SU(2)$ viene representado mediante la exponencial de un elemento, también arbitrario, de $su(2)$, que denotaremos mediante

$$L = \vec{\theta} \cdot \vec{L} = \frac{i}{2} \vec{\theta} \cdot \vec{\sigma} = \frac{i}{\hbar} \vec{\theta} \cdot \vec{J} \quad (10.14)$$

De la misma manera que antes, ahora encontramos que $(\vec{\theta} \cdot \vec{\sigma})^2 = \theta^2 I$, y por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned} U(\theta) &= e^{\vec{\theta} \cdot \vec{L}} = e^{i\vec{\theta} \cdot \vec{J}} \\ &= e^{\frac{i}{2}\vec{\theta} \cdot \vec{\sigma}} \\ &= 1 + \frac{i}{2}\vec{\theta} \cdot \vec{\sigma} + \frac{1}{2}\left(\frac{i}{2}\vec{\theta} \cdot \vec{\sigma}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{i}{2}\vec{\theta} \cdot \vec{\sigma}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{i}{2}\vec{\theta} \cdot \vec{\sigma}\right)^4 + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^4 - \dots + \left(1 - \frac{1}{3!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 + \dots\right)\left(\frac{i}{2}\vec{\theta} \cdot \vec{\sigma}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^4 - \dots + i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^3 + \dots\right)\left(\frac{\vec{\theta}}{\theta} \cdot \vec{\sigma}\right) \\ &= \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{1} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left(\frac{\vec{\theta}}{\theta} \cdot \vec{\sigma}\right) \\ &= \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{1} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} + in_3 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} & (in_1 + n_2) \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \\ (in_1 - n_2) \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} - in_3 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10.15)$$

donde, de nuevo, hemos definido el vector unitario $\vec{\theta} = \theta\vec{n}$. Por tanto, de nuevo podemos parametrizar los elementos de este grupo mediante un vector tridimensional $\vec{\theta}$.

Ahora, por el contrario, la periodicidad es 4π , de modo que podemos tomar en cuenta este hecho permitiendo que θ varíe en un rango de la misma longitud, por ejemplo: $-2\pi \leq \vec{\theta} \leq 2\pi$ y \vec{n} en el hemisferio norte, ya que $U(\theta \cdot (-\vec{n})) = U((-\theta) \cdot \vec{n})$.

10.2.1.2 Parámetros de Euler

Por analogía con las rotaciones, podemos escribir

$$\begin{aligned}
U(\psi, \theta, \phi) &= e^{i\frac{\psi}{2}\sigma_3} e^{i\frac{\theta}{2}\sigma_1} e^{i\frac{\phi}{2}\sigma_3} \\
&= \begin{pmatrix} e^{i\frac{\psi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\psi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & i \sin \frac{\theta}{2} \\ -i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\psi+\phi}{2}} & i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\psi-\phi}{2}} \\ -i \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\psi-\phi}{2}} & \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\psi+\phi}{2}} \end{pmatrix} \tag{10.16}
\end{aligned}$$

10.2.2. Homomorfismo entre $SU(2)$ y $SO(3)$

Del resultado de las secciones anteriores se deduce que podemos definir una aplicación $h : SU(2) \rightarrow SO(3)$, que haga corresponder a $U(\vec{\theta}) \in SU(2)$ precisamente $R(\vec{\omega} = \vec{\theta}) \in SO(3)$. Es hecho de que esta aplicación sea un *homomorfismo*, es decir, que a $U(\vec{\theta})U(\vec{\theta}') = U(\vec{\theta}'')$ le haga corresponder $R(\vec{\theta})R(\vec{\theta}') = R(\vec{\theta}'')$ es consecuencia de que para encontrar $\vec{\theta}''(\vec{\theta}, \vec{\theta}')$ sólo es necesario utilizar las relaciones de conmutación del álgebra, y estas son iguales para ambos grupos.

Sin embargo es evidente que no es un isomorfismo ¡La periodicidad del parámetro θ es el doble que la de ω ! Por tanto, sospechamos que la aplicación no es inyectiva, y que para cada elemento de $SO(3)$ existen dos elementos de $SU(2)$. Para demostrarlo vamos a utilizar un resultado que es de uso frecuente cuando se trabaja con homomorfismos:

Teorema 10.2.1 *Sea $f : G \rightarrow G'$ un homomorfismo de G en G' , cuyo núcleo es $Ker(f)$. Entonces, la imagen $Im(f) \subset G'$ es isomorfa a $G/Ker(f) \subset G$:*

$$Im(f) \simeq \frac{G}{Ker(f)}. \tag{10.17}$$

En el caso que nos ocupa, podemos encontrar fácilmente el núcleo, puesto que para $\theta = 2\pi$ tenemos que $R(2\pi) = R(0) = 1$. Por el contrario, $U(2\pi) = -1$. En resumen, el núcleo consta de dos elementos

$$Ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{10.18}$$

que forma una representación del grupo Z_2 . En virtud del teorema anterior, encontramos para la imagen

$$SO(3) \simeq SU(2)/Z_2. \tag{10.19}$$

Sin necesidad de hacer uso del teorema (10.2.1) vemos que dos elementos $U_{\vec{n}}(\theta)$ y $U_{\vec{n}}(\theta + 2\pi)$ que se aplican en el mismo elemento $R_{\vec{n}}(\theta)$, se diferencian en un factor $U_{\vec{n}}(2\pi) = -1_{2 \times 2}$.

10.2.2.1 En resumen: los grupos $SU(2)$ y $SO(3)$ difieren en sus propiedades globales, pero comparten el mismo álgebra, el cuál refleja la estructura del grupo en la vecindad de la identidad. La relación puede ser dibujada geoméricamente en la forma siguiente. El vector OP representa $\vec{\theta} = \theta\vec{n}$. Todo el espacio de parámetros de $SO(3)$ puede acomodarse en la esfera de radio π . Para verlo recordemos que hemos permitido un rango de variación para $\theta \in [-\pi, +\pi]$, mientras que \vec{n} ,

que señala el eje de rotación, es un vector unitario que sólo puede apuntar en direcciones del hemisferio superior para evitar un doble contaje.

Por su parte, el espacio de parámetros para $SU(2)$ consiste en todo el interior de la esfera de radio 2π . Efectivamente, en este caso $\theta \in [-2\pi, 2\pi]$, con \vec{n} de nuevo en el hemisferio superior.

Un detalle importante que diferencia ambas construcciones es el hecho de que todos los puntos que caen exactamente sobre la esfera $\theta = 2\pi$ se corresponden con un único elemento de $SU(2)$, $U_{\vec{n}}(2\pi) = -1_{2 \times 2}$. La representación gráfica, si bien es útil, no es fiel en este sentido.

10.2.2.2 Una trayectoria en el grupo $SO(3)$ que represente una sucesión continua de rotaciones de ángulos $-\pi \leq \theta \leq \pi$ en torno a un eje \vec{n} fijo, viene representada mediante una recta que parte de algún punto sobre la esfera de radio π , atraviesa el origen y termina en el punto diametralmente opuesto. Como puntos diametralmente opuestos representan la misma rotación, se pueden identificar y vemos que la trayectoria constituye una curva cerrada.

El mismo razonamiento puede hacerse con respecto a una rotación continua de ángulo $-2\pi \leq \theta \leq 2\pi$ en torno a un eje fijo, para el grupo $SU(2)$. Se trata también de una curva cerrada.

El lector debe convencerse de un hecho crucial que distingue a un caso del otro: en el caso de $SO(3)$ es imposible deformar continuamente la curva cerrada de forma que pueda contraerse a un punto: cualquier trayectoria que alcanza la esfera $\theta = \pi$ en algún punto, reaparece automáticamente en el punto diametralmente opuesto. Al mover el primero, se desplaza el segundo como un reflejo. Esto no es así para $SU(2)$, ya que entra en juego la observación de que *todos los puntos sobre la esfera $\theta = 2\pi$ son equivalentes*. Por tanto podemos mover independientemente los puntos en los que la curva se adhiere a esta esfera sin que esta deje de ser cerrada. Procediendo así hasta hacerlos coincidir al final obtendremos una curva cerrada también en el sentido de la representación gráfica, la cual puede ser deformada a un punto sin obstrucción alguna.

Definición 10.2.1 *Decimos que una variedad diferencial, M , es “simplemente conexa” si toda curva cerrada puede deformarse de forma continua a un punto.*

La discusión anterior nos permite ilustrar esta definición con un ejemplo de cada tipo: $SO(3)$ no es simplemente conexo mientras que $SU(2)$ sí es simplemente conexo.

10.3. Representaciones Irreducibles de $SU(2)$ y $SO(3)$.

Al tratarse de grupos matriciales, inmediatamente estamos en conocimiento de una representación fiel del grupo: aquella que asigna a cada elemento la propia matriz. Así para $SO(3)$ conocemos una representación de dimensión $d = 3$ y para $SU(2)$ una de dimensión $d = 2$.

Estas representaciones han sido obtenidas mediante la exponenciación de matrices pertenecientes al álgebra correspondiente. En otras palabras, conocemos también una representación para cada álgebra. Concretamente las matrices (10.2) y (10.9) forman bases para representaciones antihermíticas de dimensiones $d = 3$ y $d = 2$ para $so(3)$ y $su(2)$ respectivamente.

El procedimiento seguido en este caso ha consistido en “ir del álgebra al grupo”, y es el que debe seguirse para construir el resto de las representaciones irreducibles. Por tanto, vamos a empezar por estudiar las representaciones irreducibles de $so(3)$ y $su(2)$.

10.3.1. Representaciones Irreducibles de $su(2)$ y $so(3)$.

10.3.1.1 La primera observación relevante es esta: como $su(2)$ y $so(3)$ son álgebras de Lie reales isomorfas, sus representaciones coinciden.

Esto implica que automáticamente conocemos 2 representaciones para cada una de las dos álgebra, dadas por (10.2) y (10.9). En adelante, por tanto nos referiremos exclusivamente a $su(2)$.

La segunda observación, si bien es prematuro reconocer su importancia, consiste en el hecho de que la construcción de las *representaciones irreducibles* de $su(2)$ se simplifica enormemente si admitimos combinaciones lineales complejas de los generadores L_i . La estructura resultante es un “álgebra de Lie compleja”.¹

10.3.1.2

A partir de J_1 y J_2 , definimos los operadores “escalera” J_{\pm} en la forma

$$J_+ = J_1 + iJ_2 ; \quad J_- = J_1 - iJ_2. \quad (10.20)$$

Inversamente, tenemos

$$J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-), \quad J_2 = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-). \quad (10.21)$$

Ahora, haciendo uso de las relaciones de conmutación (10.13) obtenemos el álgebra $\widetilde{su}(2)$ en esta nueva base

$$\begin{aligned} [J_3, J_+] &= J_+ \\ [J_3, J_-] &= -J_- \\ [J_+, J_-] &= 2J_3 \end{aligned} \quad (10.22)$$

Si bien J_3 sigue siendo hermítico, J_{\pm} son mutuamente conjugados:

$$J_3^+ = J_3 ; \quad J_{\pm}^+ = J_{\mp}. \quad (10.23)$$

Finalmente, y como consecuencia de las relaciones de conmutación, tenemos que $J^2 \equiv J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ conmuta con todos los generadores²

$$[J^2, J_i] = [J^2, J_{\pm}] = 0 \quad (10.24)$$

10.3.1.3 Desde el punto de vista abstracto, el álgebra $su(2)$ viene especificada a partir de las relaciones de conmutación (10.22) para los tres generadores $\{J_+, J_-, J_3\}$.

Construir una representación \mathcal{D} de $su(2)$ de dimensión d es tan sencillo como encontrar un conjunto de 3 matrices (en general complejas) $d \times d$, $\{\mathcal{D}(J_+), \mathcal{D}(J_-), \mathcal{D}(J_3)\}$, las cuales verifican exactamente las relaciones de conmutación de $su(2)$.

Es conveniente resumir los resultados esenciales acerca de la existencia y caracterización de las *representaciones irreducibles* de $su(2)$ en el enunciado de un teorema:

¹Un álgebra de Lie compleja de dimensión d , es un espacio vectorial complejo de dimensión compleja d , dotado de un corchete de Lie que satisface las mismas propiedades que para álgebras de Lie reales, excepto que, ahora, la linealidad se entiende con respecto a coeficientes complejos.

No se debe confundir el hecho de que un álgebra de Lie sea compleja con el hecho de que sus elementos sean complejos (c.f. (10.9)). La caracterización real o compleja del álgebra hace referencia al tipo de combinaciones lineales admisibles. Sea \mathcal{L} un álgebra de Lie real, tal que una base cualquiera es linealmente independiente *también sobre el cuerpo de los números complejos*. Podemos entonces considerar el cambio de cuerpo $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ y el álgebra compleja que se obtiene es única, denominándose *complexificación* del álgebra de Lie real \mathcal{L} , $\widetilde{\mathcal{L}}$.

Esto es lo que ocurre en el caso de las matrices L_i de (10.9). Podemos tomar estas mismas matrices como base para la complexificación $\widetilde{su}(2)$ de $su(2)$. La base es la misma, y la dimensión compleja también, por tanto la dimensión real es el doble.

En la clasificación de Cartán, de álgebras complejas simples, se denomina a $\widetilde{su}(2)$, A_1 . En general la complexificación $\widetilde{su}(N)$ de $su(N)$ se denomina A_N .

²Debe usarse la siguiente identidad: $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$.

Teorema 10.3.1 (i) Todas y cada una de las representaciones irreducibles de dimensión finita de $su(2)$ de dimensión finita (y su complejificación A_1), vienen etiquetadas por un número entero o semi-entero no-negativo $\{\mathcal{D}^{(j)}; j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots\}$. $\mathcal{D}^{(j)}$ es un operador lineal que actúa sobre un espacio vectorial $V^{(j)}$ de dimensión real (o compleja) $d_j = 2j + 1$.

(ii) Denotemos una base ortonormal de vectores del espacio vectorial $V^{(j)}$ en la forma $\{|\mathbf{e}_m^{(j)}\rangle; m = j, j-1, j-2, \dots, -j+1, -j\}$ ³. Esta base puede ser escogida de forma que todos los vectores $\{|\mathbf{e}_m^{(j)}\rangle\}$ de la misma sean autovectores de $\mathcal{D}^{(j)}(J^2)$ y de $\mathcal{D}^{(j)}(J_3)$ simultáneamente con autovalores $j(j+1)$ y m respectivamente; o sea:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{(j)}(J^2) |\mathbf{e}_m^{(j)}\rangle &= j(j+1) |\mathbf{e}_m^{(j)}\rangle \\ \mathcal{D}^{(j)}(J_3) |\mathbf{e}_m^{(j)}\rangle &= m |\mathbf{e}_m^{(j)}\rangle.\end{aligned}\quad (10.25)$$

Además, las fases relativas de cada uno de estos vectores puede ser escogida de tal forma que

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{(j)}(J_+) |\mathbf{e}_m^{(j)}\rangle &= \sqrt{(j-m)(j+m+1)} |\mathbf{e}_{m+1}^{(j)}\rangle \\ \mathcal{D}^{(j)}(J_-) |\mathbf{e}_m^{(j)}\rangle &= \sqrt{(j+m)(j-m+1)} |\mathbf{e}_{m-1}^{(j)}\rangle\end{aligned}\quad (10.26)$$

Correspondientemente, en dicha base encontramos matrices $\mathcal{D}^{(j)m'}_m$ que representan los operadores $\mathcal{D}^{(j)}$, y cuyos elementos de matriz son

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{(j)}(J_+)^{m'}_m &= \sqrt{(j-m)(j+m+1)} \delta^{m'}_{m+1} \\ \mathcal{D}^{(j)}(J_-)^{m'}_m &= \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \delta^{m'}_{m-1} \\ \mathcal{D}^{(j)}(J_3)^{m'}_m &= m \delta^{m'}_m.\end{aligned}\quad (10.27)$$

Demostración: Como hemos dicho anteriormente, los operadores $\mathcal{D}(J_i)$ han de verificar las mismas relaciones de conmutación que los generadores del álgebra J_i . Para simplificar la notación, denotaremos al operador lineal $\mathcal{D}(J_i)$ mediante J_i , sobrentendiendo la diferencia que existe entre ambos objetos.

En particular tenemos que, como J^2 y J_3 son generadores hermíticos que conmutan entre sí existe una base común de autovectores con autovalores reales: sea \mathbf{v} un autovector de J_3 con autovalor m y de J^2 con autovalor $\lambda(m)$, es decir:

$$\begin{aligned}J_3|\mathbf{v}\rangle &= m|\mathbf{v}\rangle \\ J^2|\mathbf{v}\rangle &= \lambda(m)|\mathbf{v}\rangle\end{aligned}\quad (10.28)$$

Entonces, se deduce de las relaciones de conmutación (10.22) que

$$J_3(J_+|\mathbf{v}\rangle) = (m+1)(J_+|\mathbf{v}\rangle).\quad (10.29)$$

Por tanto, excepto cuando $J_+|\mathbf{v}\rangle = 0$, este vector es un vector propio de J_3 con autovalor $m+1$. Análogamente probamos que, excepto cuando $J_-|\mathbf{v}\rangle = 0$, este vector es un vector propio de J_3 con autovalor $m-1$.

Por tanto, los autovalores m de J_3 , forman secuencias de números separados por intervalos enteros. Los operadores J_\pm se denominan “operadores escalera” porque inducen, a través de J_\pm , saltos de “escalones unidad” dentro de cada una de estas secuencias.

³ m asume valores enteros si j es entero, y valores semienteros cuando j es semi-entero

En virtud del hecho de que J^2 conmuta con J_{\pm} y con J_3 deducimos que: todos los autovectores pertenecientes a una secuencia de valores $\dots m-1, m, m+1, \dots$ comparten idéntico autovalor de J^2 : $\dots \lambda(m-1), \lambda(m), \lambda(m+1), \dots = \lambda$. Esta secuencia de vectores genera un subespacio vectorial que es invariante bajo la acción de todos los elementos del álgebra. En definitiva se trata del \mathcal{G} -módulo asociado a una representación irreducible que, por hipótesis, tiene de dimensión finita. La hipótesis de finitud implica que estas secuencias se truncan para algún valor de m .

Sea $m = j$ el *máximo* autovalor de J_3 , dentro de una secuencia de vectores propios como las descritas anteriormente y *supongamos que dicho autovalor no es degenerado*. Denominemos el vector propio correspondiente $|\mathbf{v}_j\rangle$. Entonces necesariamente se cumple que $J_+|\mathbf{v}_j\rangle = 0$ ya que de otro modo obtendríamos un vector propio con autovalor $m = j+1$ en contra de la hipótesis. Entonces tenemos que

$$J_-(J_+|\mathbf{v}_j\rangle) = 0. \quad (10.30)$$

Vamos a examinar esta ecuación, primero en términos de los generadores abstractos:

$$J_-J_+ = (J_1 - iJ_2)(J_1 + iJ_2) = J_1^2 + J_2^2 + i[J_1, J_2] = (J^2 - J_3^2) - J_3 = J^2 - J_3(J_3 + 1) \quad (10.31)$$

Correspondientemente tenemos que

$$J_-(J_+|\mathbf{v}_j\rangle) = (J^2 - J_3(J_3 + 1))|\mathbf{v}_j\rangle \quad (10.32)$$

de donde deducimos que

$$J^2|\mathbf{v}_j\rangle = j(j+1)|\mathbf{v}_j\rangle. \quad (10.33)$$

En resumen, todos los vectores de la representación irreducible tienen idéntico autovalor de J^2 , $\lambda_j = j(j+1)$.

Consideremos a continuación el conjunto de vectores $J_-|\mathbf{v}_j\rangle, J_-^2|\mathbf{v}_j\rangle = J_-^2|\mathbf{v}_j\rangle, \dots$, que corresponden a los autovalores $m = j-1, j-2, \dots$ de J_3 . De nuevo, si suponemos que se trata de una representación de dimensión finita, en esta secuencia debe alcanzarse el vector cero después de un número finito de pasos; es decir, $\exists k$ tal que $J_-^k|\mathbf{v}_j\rangle \neq 0$ pero $J_-^{k+1}|\mathbf{v}_j\rangle = 0$. Entonces el mínimo autovalor de J_3 es $j-k$.

Examinemos entonces las consecuencias de la igualdad $J_+J_-(J_-^k|\mathbf{v}_j\rangle) = 0$. Mediante un razonamiento paralelo al seguido en (10.31), (10.32) tenemos que

$$J_+J_- = J^2 - J_3^2 + J_3 \quad (10.34)$$

y por tanto

$$J_+J_-(J_-^k|\mathbf{v}_j\rangle) = (J^2 - J_3^2 + J_3)(J_-^k|\mathbf{v}_j\rangle) = (j(j+1) - (j-k)^2 + (j-k))(J_-^k|\mathbf{v}_j\rangle) = 0 \quad (10.35)$$

Como, por hipótesis, $J_-^k|\mathbf{v}_j\rangle \neq 0$, encontramos que

$$j(j+1) - (j-k)^2 + (j-k) = 0 = (2j-k)(k+1) = 0 \quad (10.36)$$

es decir $j = k/2$.

En definitiva, los únicos valores posibles para j son $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ mientras que los valores propios posibles para J_3 son $j, j-1, j-2, \dots, -j+1, -j$. Como son en total $2j+1$ valores, la dimensión de la representación es $d_j = 2j+1$.

Denotemos por $|\mathbf{e}_m^{(j)}\rangle$ autovectores simultáneos de J^2 y J_3 con autovalores $j(j+1)$ y m respectivamente.

$$\begin{aligned} J^2|\mathbf{e}_m^{(j)}\rangle &= j(j+1)|\mathbf{e}_m^{(j)}\rangle \\ J_3|\mathbf{e}_m^{(j)}\rangle &= m|\mathbf{e}_m^{(j)}\rangle. \end{aligned} \quad (10.37)$$

Sabemos que $J_- \mathbf{e}_m^{(j)}$ sigue siendo autovector, por tanto podemos escribir

$$J_- |\mathbf{e}_m^{(j)}\rangle = \alpha_m^j |\mathbf{e}_{m-1}^{(j)}\rangle \quad (10.38)$$

donde α_m^j es un número complejo. Como $\{|\mathbf{e}_m^{(j)}\rangle\}$ forman un conjunto ortonormal de auto-
vectores, tenemos que

$$\begin{aligned} |\alpha_m^j|^2 &= \langle \alpha_m^j \mathbf{e}_{m-1}^{(j)} | \alpha_m^j \mathbf{e}_{m-1}^{(j)} \rangle \\ &= \langle J_- \mathbf{e}_m^{(j)} | J_- \mathbf{e}_m^{(j)} \rangle \\ &= \langle \mathbf{e}_m^{(j)} | J_+ J_- \mathbf{e}_m^{(j)} \rangle \\ &= \langle \mathbf{e}_m^{(j)} | (J^2 - J_3^2 + J_3) \mathbf{e}_m^{(j)} \rangle \\ &= (j(j+1) - m^2 + m) \langle \mathbf{e}_m^{(j)} | \mathbf{e}_m^{(j)} \rangle \\ &= (j+m)(j-m+1). \end{aligned} \quad (10.39)$$

Es necesario tomar la “raíz cuadrada” de esta expresión. Siguiendo el convenio de Condon-Shortley (1935), tomaremos α_m^j real y positiva. De esta manera $\alpha_m^j = \sqrt{(j+m)(j-m+1)}$, o lo que es igual

$$J_- |\mathbf{e}_m^{(j)}\rangle = \sqrt{(j+m)(j-m+1)} |\mathbf{e}_{m-1}^{(j)}\rangle. \quad (10.40)$$

Como $\alpha_{-j}^j = 0$ y $J_- \mathbf{e}_{-j}^{(j)} = 0$ esta ecuación es consistente para $j, j-1, \dots, -j+1, -j$.

Por otro lado, multiplicando la ecuación (10.38) por J_+ en ambos miembros encontramos

$$J_+ |\mathbf{e}_{m-1}^{(j)}\rangle = \frac{1}{\alpha_m^j} J_+ J_- |\mathbf{e}_m^{(j)}\rangle = \frac{|\alpha_m^j|^2}{\alpha_m^j} |\mathbf{e}_m^{(j)}\rangle = \alpha_m^j |\mathbf{e}_m^{(j)}\rangle \quad (10.41)$$

donde en el último paso hemos seguido la convención de Condon-Shortley para tomar la raíz cuadrada. En resumidas cuentas, llegamos a que

$$J_+ |\mathbf{e}_m^{(j)}\rangle = \alpha_{m+1}^j = \sqrt{(j+m+1)(j-m)} |\mathbf{e}_{m+1}^{(j)}\rangle \quad (10.42)$$

para $m = -j, -j+1, \dots, j-1$. De nuevo, como $\alpha_{j+1}^j = 0$ y a su vez $J_+ |\mathbf{e}_j^{(j)}\rangle = 0$, la ecuación anterior es consistente cuando $m = j$.

Volviendo a la notación $J_i \rightarrow \mathcal{D}^{(j)}(J_i)$, las matrices que representan estos operadores lineales $\mathcal{D}^{(j)}(J_i)$ son elementales de hallar a partir de las relaciones (10.42) y (10.61)

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(j)}(J_+)^{m'}_m &= \langle \mathbf{e}_{m'}^{(j)} | \mathcal{D}^{(j)}(J_+) \mathbf{e}_m^{(j)} \rangle = \sqrt{(j-m)(j+m+1)} \delta^{m'}_{m+1} \\ \mathcal{D}^{(j)}(J_-)^{m'}_m &= \langle \mathbf{e}_{m'}^{(j)} | \mathcal{D}^{(j)}(J_-) \mathbf{e}_m^{(j)} \rangle = \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \delta^{m'}_{m-1} \\ \mathcal{D}^{(j)}(J_3)^{m'}_m &= \langle \mathbf{e}_{m'}^{(j)} | \mathcal{D}^{(j)}(J_3) \mathbf{e}_m^{(j)} \rangle = m \delta^{m'}_m \end{aligned} \quad (10.43)$$

■

10.3.1.4 Resulta interesante examinar en detalle los casos especiales $j = 0, \frac{1}{2}$, y 1. La representación $j = 0$ tiene dimensión 1 y es la representación trivial $\mathcal{D}^{(0)}(J_i) = 1$.

La representación $\mathcal{D}^{(\frac{1}{2})}$ es 2-dimensional. Etiquetando las filas primera y segunda mediante $m' = \frac{1}{2}$ y $m' = -\frac{1}{2}$, y las columnas primera y segunda mediante $m = \frac{1}{2}$ y $m = -\frac{1}{2}$ respectivamente encontramos el siguiente conjunto de matrices

$$\mathcal{D}^{(\frac{1}{2})}(J_+) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}^{(\frac{1}{2})}(J_-) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}^{(\frac{1}{2})}(J_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (10.44)$$

Después de deshacer el cambio de variables encontramos para $\mathcal{D}^{(\frac{1}{2})}(J_i) = \frac{i}{2}\sigma_i$, la representación bidimensional (10.12) que define $su(2)$.

Para $\mathcal{D}^{(1)}$ las matrices son 3×3 . De nuevo, etiquetando las filas y columnas con valores de $m' = 1, 0, -1$ y $m = 1, 0, -1$ obtenemos la base para la representación en la forma siguiente

$$\mathcal{D}^{(1)}(J_+) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{D}^{(1)}(J_-) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \mathcal{D}^{(1)}(J_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y deshaciendo el cambio según se indica en (10.21)

$$\mathcal{D}^{(1)}(J_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{D}^{(1)}(J_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \mathcal{D}^{(1)}(J_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (10.45)$$

Esta representación es unitariamente equivalente a la representada en (10.2). En efecto, la matriz

$$U = \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (10.46)$$

es unitaria $U^{-1} = U^\dagger$, y verifica $U\mathcal{D}^{(1)}(J_i)U^\dagger = iL_i$ (salvo una redefinición de los ejes $L_3 \leftrightarrow L_2$).

10.3.2. Representaciones de los Grupos $SU(2)$ y $SO(3)$

Solucionado el problema de la construcción de las representaciones irreducibles de $su(2)$ formalmente está resuelta también la construcción de las representaciones de $SU(2)$. Para cada $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ obtenemos una representación irreducible de $SU(2)$, $D^{(j)}$ a partir de la correspondiente representación de $su(2)$ $\mathcal{D}^{(j)}$ mediante la aplicación exponencial

$$D^{(j)}(g = e^{itJ}) = e^{it\mathcal{D}^{(j)}(J)} = 1 + it\mathcal{D}^{(j)}(J) + \dots \quad (10.47)$$

donde J es un elemento (hermítico) del álgebra.

10.3.2.1 Si particularizamos para $j = \frac{1}{2}$ encontraremos precisamente la representación (10.16), mientras que si $j = 1$ la representación que obtenemos exponenciando las matrices (10.45) es unitariamente equivalente a la representación (10.6).

El cálculo de las representaciones de dimensión superior no representa mayor inconveniente técnico.

10.3.2.2 Si nos concentramos ahora sobre el grupo $SO(3)$ encontramos un punto sutil. Efectivamente, las álgebras $su(2)$ y $so(3)$ son isomorfas y por tanto comparten el mismo conjunto de representaciones irreducibles. Sin embargo no todas ellas inducen bajo la aplicación exponencial representaciones del grupo $SO(3)$. Para verlo consideremos la familia uniparamétrica de elementos $g(t) = e^{itJ_3}$ en la representación de “espín” j .

$$\begin{aligned} D^{(j)}(g(t)) &= D^{(j)}(e^{itJ_3}) \\ &= \exp\{it\mathcal{D}^{(j)}(J_3)\} \\ &= \exp\{it \text{diag}(j, j-1, \dots, -j+1, -j)\} \\ &= \text{diag}(e^{itj}, e^{it(j-1)}, \dots, e^{it(-j+1)}, e^{it(-j)}) \end{aligned} \quad (10.48)$$

Claramente la periodicidad $g(t) = g(t + 2\pi)$ propia del grupo $SO(3)$ sólo se ve reproducida en las matrices (10.48) cuando j es un número entero. En resumidas cuentas:

Lema 10.3.1 *La representación $\mathcal{D}^{(j)}$ de $so(3)$ induce bajo exponenciación una representación $D^{(j)}$ del grupo $SO(3)$, si y sólo si j es un entero no-negativo.*

10.3.2.3 Por último, vamos a calcular el carácter $\chi^j(\vec{\omega})$ de un elemento $g(\vec{\omega})$ de $SU(2)$ en la representación $D^{(j)}$. En particular vamos a calcularlo para $\vec{\omega}\vec{J} = \omega J_3$, es decir con $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$. Utilizando la ecuación (10.48), vemos como

$$\chi^j(\vec{\omega}) = \sum_{m=-j}^j e^{im\omega} \quad (10.49)$$

Esta es una serie geométrica de $2j + 1$ términos con razón constante $r = e^{i\omega}$, por tanto

$$\chi^j(\vec{\omega}) = \frac{e^{-ij\omega} - e^{i(j+1)\omega}}{1 - e^{i\omega}}. \quad (10.50)$$

Multiplicando arriba y abajo por $e^{-j\omega/2}$ llegamos a la expresión

$$\chi^j(\vec{\omega}) = \frac{e^{-i(j+\frac{1}{2})\omega} - e^{i(j+\frac{1}{2})\omega}}{e^{-i\omega/2} - e^{i\omega/2}} = \frac{\text{sen}(j + \frac{1}{2})\omega}{\text{sen} \frac{1}{2}\omega}. \quad (10.51)$$

Como hemos dicho este es el carácter de una rotación de ángulo ω en torno a un eje $\vec{n} = \vec{\omega}/\omega$ con $\vec{n} = (0, 0, 1)$. Sin embargo, una rotación del mismo ángulo en torno a otro eje \vec{n}' se relaciona con ésta mediante un cambio de orientación de los ejes. Esto quiere decir que las matrices $D_{\vec{n}}^{(j)}(\omega)$ y $D_{\vec{n}'}^{(j)}(\omega)$ son *semejantes*, y por tanto comparten idéntico carácter. En resumen por tanto,

$$\chi^j(\vec{\omega}) = \frac{\text{sen}(j + \frac{1}{2})\omega}{\text{sen} \frac{1}{2}\omega}. \quad (10.52)$$

es el carácter de una rotación de ángulo ω en torno a un eje cualquiera.

10.4. Producto Directo de Representaciones

Recordemos, que la serie de Clebsh-Gordan, produce la descomposición del producto directo de dos representaciones irreducibles, como suma directa de representaciones irreducibles.

Físicamente esto se corresponde con el problema del acoplamiento de momentos angulares en mecánica cuántica.

El resultado importante está contenido en el siguiente teorema

Teorema 10.4.1 *La serie de Clebsh-Gordan, para el producto directo de dos irreps $D^{(j_1)}$ y $D^{(j_2)}$ de $SU(2)$, es*

$$D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)} = \sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \oplus D^{(J)} \quad (10.53)$$

Demostración: Tomemos $j_1 \geq j_2$. Entonces $\chi^{j_1 \otimes j_2} = \chi^{(j_1)}\chi^{(j_2)}$ y haciendo uso de las expresiones (10.49) y (10.51) en la forma más conveniente tenemos

$$\begin{aligned} \chi^{(j_1)}\chi^{(j_2)} &= \frac{e^{i(j_1+\frac{1}{2})\omega} - e^{-i(j_2+\frac{1}{2})\omega}}{2i \text{sen} \frac{\omega}{2}} \sum_{m=-j_2}^{j_2} e^{im\omega} \\ &= \frac{1}{2i \text{sen} \frac{\omega}{2}} \sum_{m=-j_2}^{j_2} (e^{i(j_1+m+\frac{1}{2})\omega} - e^{-i(j_1-m+\frac{1}{2})\omega}) \end{aligned} \quad (10.54)$$

Como la suma sobre valores de m es sobre un intervalo simétrico, podemos cambiar $-m$ por m en el segundo exponente. Después de hacer esto observamos que m y j_1 aparecen siempre en la combinación $j = j_1 + m$, con j corriendo desde $j_1 - j_2$ hasta $j_1 + j_2$. Es decir

$$\chi^{(j_1)}\chi^{(j_2)} = \frac{1}{2i \operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} \sum_{j=j_1-j_2}^{j_1+j_2} (e^{i(j+\frac{1}{2})\omega} - e^{-i(j+\frac{1}{2})\omega}) = \sum_{j=j_1-j_2}^{j_1+j_2} \frac{\operatorname{sen}(j+\frac{1}{2})\omega}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} \quad (10.55)$$

Así llegamos a la expresión final

$$\chi^{j_1 \otimes j_2} = \sum_{J=j_1-j_2}^{j_1+j_2} \chi^J(\omega) \quad (10.56)$$

■

10.4.1. Composición de Momento Angular

La serie de Clebsh-Gordan (10.53), indica que el producto tensorial de dos representaciones se descompone en suma de otras tantas representaciones irreducibles,

En aplicaciones concretas a problemas de mecánica cuántica es necesario saber algo más. Concretamente desearíamos conocer cómo se expresan las bases de los espacios de representación $D^{(j)}$, como productos tensoriales de las bases de $D^{(j_1)}$ y $D^{(j_2)}$.

$$\begin{aligned} D^{(j_1 \otimes j_2)} &= e^{i\mathcal{D}^{(j_1 \otimes j_2)}(J)} \\ &= D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)} = e^{i\mathcal{D}^{(j_1)}(J)} \otimes e^{i\mathcal{D}^{(j_2)}(J)} \\ &= (1 + i\mathcal{D}^{(j_1)}(J) + \dots) \otimes (1 + i\mathcal{D}^{(j_2)}(J) + \dots) \end{aligned} \quad (10.57)$$

Para ello empezaremos recordando que, para las representaciones del algebra,

$$\mathcal{D}^{(j_1 \otimes j_2)}(J) = \mathcal{D}^{(j_1)}(J) \otimes \mathbf{1}^{(j_2)} + \mathbf{1}^{(j_1)} \otimes \mathcal{D}^{(j_2)}(J)$$

aunque generalmente omitiremos los operadores $\mathbf{1}$ en lo que sigue. Es elemental verificar que $\mathcal{D}^{(j_1 \otimes j_2)}$ verifica las mismas relaciones de conmutación que $\mathcal{D}^{(j_1)}$ y que $\mathcal{D}^{(j_2)}$, y, por tanto, es una representación del álgebra. Usaremos a partir de ahora la notación $\mathcal{D}^{(j_k)}(J) \rightarrow \hat{J}^{(k)}$. En nuestro caso tendremos, denotando $\hat{J}_i = \hat{J}_i^{(1 \otimes 2)}$

$$\hat{J}_i = \hat{J}_i^{(1)} + \hat{J}_i^{(2)} \quad i = 1, 2, 3$$

o, de forma colectiva. $\vec{\hat{J}} = \vec{\hat{J}}^{(1)} + \vec{\hat{J}}^{(2)}$. Análogamente podemos formar la base de operadores escalera

$$\hat{J}_3 = \hat{J}_3^{(1)} + \hat{J}_3^{(2)} \quad (10.58)$$

$$\hat{J}_\pm = \hat{J}_\pm^{(1)} + \hat{J}_\pm^{(2)}$$

$$\hat{J}^2 = \hat{J}^{(1)2} + \hat{J}^{(2)2} + J_+^{(1)} J_-^{(2)} + J_-^{(1)} J_+^{(2)} + 2J_3^{(1)} J_3^{(2)} \quad (10.59)$$

Con esto es fácil verificar que $\hat{J}^2 = \vec{\hat{J}} \vec{\hat{J}}$, y \hat{J}_3 siguen conmutando $[\hat{J}^2, \hat{J}_3] = 0$. Recordemos que, por lo tanto, es posible construir una base de autovectores de ambos operadores $|\mathbf{e}_M^{(j)}\rangle$ donde

$$\begin{aligned} \hat{J}^2 |\mathbf{e}_M^{(j)}\rangle &= J(J+1) |\mathbf{e}_M^{(j)}\rangle \\ \hat{J}_3 |\mathbf{e}_M^{(j)}\rangle &= M |\mathbf{e}_M^{(j)}\rangle \end{aligned} \quad (10.60)$$

Concretamente, el vector $\mathbf{e}_J^{(J)}$ es aniquilado por \hat{J}_+ , y a partir de él generamos el resto usando

$$\hat{J}_- |\mathbf{e}_M^{(J)}\rangle = \sqrt{(J+M)(J-M+1)} |\mathbf{e}_{M-1}^{(J)}\rangle. \quad (10.61)$$

Si tomamos la ecuación como una identidad entre espacios de representación, entonces debe ser posible expresar los vectores $|\mathbf{e}_M^{(J)}\rangle$ como combinación lineal de la base $|\mathbf{e}_{m_1}^{(j_1)}\rangle \otimes |\mathbf{e}_{m_2}^{(j_2)}\rangle$ de autovectores de $\{(\hat{J}^{(1)})^2, \hat{J}_3^{(1)}\} \otimes \{(\hat{J}^{(2)})^2, \hat{J}_3^{(2)}\}$. Escribimos en este caso

$$|\mathbf{e}_M^{(J)}\rangle = \sum_{m_1, m_2} C(j_1 j_2 J; m_1 m_2 M) |\mathbf{e}_{m_1}^{(j_1)}\rangle \otimes |\mathbf{e}_{m_2}^{(j_2)}\rangle \quad (10.62)$$

Los coeficientes que expresan este cambio de base se denominan *Coefficientes de Clebsch-Gordan*. De (10.58) vemos que los números m_1 y m_2 son aditivos por lo que se suele omitir el argumento m ,

$$|\mathbf{e}_{M=m_1+m_2}^{(J)}\rangle = \sum_{m_1, m_2} C(j_1 j_2 J; m_1 m_2) |\mathbf{e}_{m_1}^{(j_1)}\rangle \otimes |\mathbf{e}_{m_2}^{(j_2)}\rangle \quad (10.63)$$

La generación de la base $|\mathbf{e}_M^{(J)}\rangle$ sigue de la observación siguiente: *hay vectores propios de \hat{J}^2 y \hat{J}_3 , (uno por cada $D^{(J)}$ que entra en la suma del miembro de la derecha) que son aniquilados por \hat{J}_+ . Una vez identificado uno de estos vectores, el resto del subespacio se genera por aplicación reiterada de \hat{J}_- hasta que se trunca la sucesión. La mecánica sigue los siguientes pasos*

Paso 1: El más fácil de identificar es $|\mathbf{e}_{j_1}^{(j_1)}\rangle \otimes |\mathbf{e}_{j_2}^{(j_2)}\rangle$. Aplicando \hat{J}_3 este vector no es otro que $|\mathbf{e}_J^{(J)}\rangle$ con $J = j_1 + j_2$.

Paso 2: Utilizando la forma explícita del generador \hat{J}_- en las representaciones de dimensiones j , j_1 y j_2 uno puede expresar $|\mathbf{e}_{J-1}^{(J)}\rangle, |\mathbf{e}_{J-2}^{(J)}\rangle, \dots$, etc. en función de $\{|\mathbf{e}_{j_1-1}^{(j_1)}\rangle, |\mathbf{e}_{j_1-2}^{(j_1)}\rangle, \dots\} \otimes \{|\mathbf{e}_{j_2-1}^{(j_2)}\rangle, |\mathbf{e}_{j_2-2}^{(j_2)}\rangle, \dots\}$. Finalmente uno llega al estado $|\mathbf{e}_{-j_1}^{(J)}\rangle = |\mathbf{e}_{-j_1}^{(j_1)}\rangle \otimes |\mathbf{e}_{-j_2}^{(j_2)}\rangle$, aniquilado por \hat{J}_- . Todas estas combinaciones forman el subespacio sobre el que actúan las matrices de $\mathcal{D}^{(J)}$.

Paso 3: Con los estados $|\mathbf{e}_{j_1-1}^{(j_1)}\rangle \otimes |\mathbf{e}_{j_2}^{(j_2)}\rangle$ y $|\mathbf{e}_{j_1}^{(j_1)}\rangle \otimes |\mathbf{e}_{j_2-1}^{(j_2)}\rangle$ fórmese una combinación lineal ortogonal a $|\mathbf{e}_{J-1}^{(J)}\rangle$. Por construcción, es autovalor de \hat{J}_3 con autovalor $J-1$. Verificar que además es autoestado de \hat{J}^2 con autovalor $(J-1)J = (J-1)((J-1)+1)$, y que es aniquilado por \hat{J}_+ . Llamaremos a este estado $|\mathbf{e}_{J-1}^{(J-1)}\rangle$.

Paso 4: Repetir el Paso 2, ahora comenzando con el estado encontrado, para generar la serie $|\mathbf{e}_{J-2}^{(J-1)}\rangle, |\mathbf{e}_{J-3}^{(J-1)}\rangle, \dots$ que forma la base del subespacio sobre el que actúan las matrices de $\mathcal{D}^{(J-1)}$.

Paso 5: Identificar $|\mathbf{e}_{J-2}^{(J-2)}\rangle$ como aquella combinación de vectores $|\mathbf{e}_{j_1-2}^{(j_1)}\rangle \otimes |\mathbf{e}_{j_2}^{(j_2)}\rangle, |\mathbf{e}_{j_1-1}^{(j_1)}\rangle \otimes |\mathbf{e}_{j_2-1}^{(j_2)}\rangle$ y $|\mathbf{e}_{j_1}^{(j_1)}\rangle \otimes |\mathbf{e}_{j_2-2}^{(j_2)}\rangle$ que es ortogonal tanto a $|\mathbf{e}_{J-2}^{(J)}\rangle$ como a $|\mathbf{e}_{J-2}^{(J-1)}\rangle$. Este vector es el punto de partida para la construcción de $\mathcal{D}^{(J-2)}$.

Paso 6: El procedimiento se termina al llegar a $J = |j_1 - j_2|$. En el proceso, el número de vectores que habremos generado es

$$\begin{aligned} \sum_{i=J_{\min}}^{J_{\max}} \dim(\mathcal{D}^{(i)}) &= \sum_{i=0}^{J_{\max}} (2i+1) - \sum_{i=0}^{J_{\min}-1} (2i+1) = (J_{\max}+1)^2 - (J_{\min})^2 \\ &= (j_1 + j_2 + 1)^2 - (j_1 - j_2)^2 = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1) \end{aligned} \quad (10.64)$$

Ejercicio 10.4.1 Considera la descomposición general $D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)}$ en representaciones irreducibles $D^{(J_{\max})} \oplus D^{(J_{-1})} \oplus \dots \oplus D^{(J_{\min})}$, donde $J_{\max} = j_1 + j_2$ y $J_{\min} = |j_1 - j_2|$.

(i) Verifica que J^2 y J_3 conmutan $[J^2, J_3] = 0$.

(ii) Obtén explícitamente la forma de los vectores $|\mathbf{e}_J^{(j)}\rangle$ y $|\mathbf{e}_{J-1}^{(j)}\rangle$ con $J = J_{\max} = j_1 + j_2$. Construye $|\mathbf{e}_{J-1}^{(j-1)}\rangle$ imponiendo ortonormalidad con $|\mathbf{e}_{J-1}^{(j)}\rangle$. Verifica que J_+ aniquila este vector. Verifica que todos ellos son autoestados de J^2 con el autovalor correcto.

(ii bi) Obtén recursivamente los coeficientes de Clebsh-Gordan, $C(j_1, j_2, J; m_1, m_2)$ para el producto tensorial de dos representaciones $D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)}$ de $SU(2)$, en los casos $(j_1 = \frac{1}{2}, j_2 = \frac{1}{2})$ y $(j_1 = 1, j_2 = \frac{1}{2})$.

10.5. Tensores de $SU(2)$

10.5.0.1 Tensores (1,0)

Ya hemos visto que, dada una representación hermítica de $su(2)$, $\mathcal{D}_i^{(j)} \equiv \mathcal{D}^{(j)}(J_i)$

$$[\mathcal{D}_i^{(j)}, \mathcal{D}_j^{(j)}] = i\epsilon_{ijk}\mathcal{D}_k^{(j)} \quad (10.65)$$

obtenemos una representación para el elemento $g(\vec{\theta})$

$$D^{(j)}(g)^a_b = D^{(j)}(\vec{\theta})^a_b = (e^{i\vec{\theta} \cdot \vec{B}^{(j)}})^a_b \quad (10.66)$$

Denominamos (j) -tensores *contravariantes* a los elementos de un espacio vectorial que se transforman bajo la representación $D^{(j)}$.

$$\boxed{\eta'^a = (D^{(j)-1})^a_b \eta^b \quad (a, b = 1, \dots, 2j + 1).} \quad (10.67)$$

A los $(\frac{1}{2})$ -tensores se les conoce también con el nombre de *espinores*, y $D^{(\frac{1}{2})}$ es la representación espinorial. $D^{(1)}$ se conoce como representación vectorial, y $x^i = \eta^i_{(1)}$, $i = 1, 2, 3$ son los *vectores* tridimensionales usuales. Nótese que en general η^a son números complejos.

10.5.0.2 Tensores (0,1) La noción de covariancia y contravariancia es la misma que de costumbre. Por tanto, a la par que η^a podemos considerar η_a que se transforman según la regla usual

$$\boxed{\eta_a = D^{(j)b}_a \eta_b \quad (a, b = 1, \dots, 2j + 1).} \quad (10.68)$$

10.5.0.3 Forma Bi-lineal Invariante

La relación que verifican las matrices de $SU(2)$ deben compartirla todas sus representaciones. Por tanto, en general será verdad que $D^{(j)\dagger} D^{(j)} = 1 \forall j$. Escrito en componentes

$$D^{(j)*c}_a \delta_{cd} D^{(j)d}_b = \delta_{ab} \quad (10.69)$$

Esta ecuación sugiere una generalización de la forma bilineal que tenemos para una métrica sobre un espacio real, a un espacio complejo. Sean η^a y ξ^a dos j -espinores

$$\boxed{g(\eta, \xi) = \eta^{a*} \delta_{ab} \xi^b} \quad (10.70)$$

es claramente invariante bajo la acción de $SU(2)$

$$g(\eta', \xi') = \eta'^{*c} \delta_{cd} \eta'^d = \eta^a D^{*(j)c}{}_a \delta_{cd} D^{(j)d}{}_b \eta^b = \eta^a \delta_{ab} \eta^b = g(\eta, \xi)$$

Esto nos permite definir espinores covariantes a partir de espinores contravariantes en la forma usual

$$\eta_a = \eta^{b*} \delta_{ab} = \eta^{a*} \quad (10.71)$$

10.5.0.4 Otra forma invariante ω

En el caso $j = \frac{1}{2}$ encontramos otro tensor invariante. Definamos

$$\omega_{ab} = (i\sigma_2)_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \omega^{ab} \equiv \omega_{ab}^{-1} = (-i\sigma_2)_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (10.72)$$

Entonces claramente se cumple que

$$D^{(\frac{1}{2})a'}{}_a \omega_{a'b'} D^{(\frac{1}{2})b'}{}_b = (\det D^{(\frac{1}{2})}) \omega_{ab} = \omega_{ab} \quad (10.73)$$

De modo que ω_{ab} es un tensor antisimétrico invariante. Podemos definir una métrica invariante

$$\omega(\eta, \xi) = \eta^a \omega_{ab} \xi^b = \eta^1 \xi^2 - \eta^2 \xi^1$$

que tiene la pega de que todo espinor tiene norma nula $\omega(\eta, \eta) = 0$. Dejando de lado esta sutileza, es evidente que la no-degeneración de ω nos permite subir y bajar índices como si de una métrica usual se tratase. Ahora solo hay que tener cuidado porque contraer con el primer índice o con el segundo lleva a resultados opuestos

$$\eta_a = \omega_{ab} \eta^b = -\eta^b \omega_{ba} \quad ; \quad \eta^a = \omega^{ab} \eta_b = -\eta_b \omega^{ba} \quad (10.74)$$

10.5.0.5 Representación Conjugada

En general, aunque un álgebra de Lie sea un espacio vectorial real, las matrices que forman una representación arbitraria no tienen por que ser reales. El caso más evidente es el de la representación espinorial de $SU(2)$, $\mathcal{D}_i^{(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2} \sigma_i$. Sin embargo, siempre existe una base en la cual las constantes de estructura deben ser números reales o púramente imaginarios. Nos centraremos en esta segunda base, de la cual ((10.65)) es un ejemplo.

Dada una representación \mathcal{D} de un algebra de Lie en una base como la mencionada, se demuestra inmediatamente que las siguientes son también representaciones $-\mathcal{D}^*$, $-\mathcal{D}^T$ y \mathcal{D}^{*T} . Exponenciando estas representaciones en la forma usual (10.47), vemos que cualquier representación D de un grupo de Lie, viene automáticamente acompañada de otras tres D^* , D^{-1T} y D^{*-1T}

En general estas representaciones no son equivalentes. En el caso de que exista algún elemento del álgebra S , tal que $\mathcal{S}\mathcal{D}\mathcal{S}^{-1} = -\mathcal{D}^*$ es inmediato verificar que $\mathcal{S}D\mathcal{S}^{-1} = D^*$. En este caso decimos que la representación \mathcal{D} del álgebra y D del grupo son *reales*. En caso contrario, el caso general, decimos que la representación es *compleja*.

10.5.0.6 La representación $D = D^{(\frac{1}{2})}$ es real

Esto se deduce sencillamente del hecho de que existe una métrica invariante que es real. Nos estamos refiriendo a ω que como vemos, permite construir espinores contravariantes a partir de covariantes y viceversa, sin necesidad de invocar la conjugación compleja. De hecho la ecuación (10.73) puede escribirse en forma matricial

$$\boxed{D^t \omega D = \omega} \quad (10.75)$$

Haciendo uso de la unitariedad esta ecuación puede ponerse en la forma equivalente

$$\boxed{\omega D \omega^{-1} = (D^t)^{-1} = D^*} \quad (10.76)$$

o, en componentes⁴

$$\omega_{ab}D^b{}_c\omega^{cd} = (D^{-1})^t{}_d{}^a = D^{-1}{}_d{}^a$$

Solo hace falta recordar que ω es un elemento del álgebra $\omega = -i\sigma_2$ y tenemos el resultado que anunciábamos. Es sencillo probar que, consistentemente

$$\omega\mathcal{D}^*\omega^{-1} = i\sigma_2\mathcal{D}^*(-i\sigma_2) = -\mathcal{D}^*$$

En resumidas cuentas los espinores contravariantes y covariantes se transforman con matrices mutuamente complejas conjugadas. Si $\eta'^a = D^a{}_b\eta^b = (D\eta)^a$

$$\begin{aligned}\eta'_a &= \omega_{ab}\eta'^b \\ &= \omega_{ab}D^b{}_c\eta^c \\ &= (\omega_{ab}D^b{}_c\omega^{cd})\eta_d \\ &= D^{-1}{}_c{}^a\eta_c \\ &= (D^{-1T}\eta)_a \\ &= (D^*\eta)_a.\end{aligned}$$

La equivalencia entre D y D^{-1T} es la que existe siempre que tenemos una métrica invariante, entre los tensores covariantes y contravariantes. La equivalencia entre D y D^* se entiende en este caso por la unitariedad, que implica que $D^* = D^{-1T}$.

10.5.1. Homomorfismo entre $SU(2)$ y $SO(3)$

Ya hemos hablado de los espinores. Por su parte, los vectores se transforman según la representación de espín 1

$$x^i = D^{(1)}(\vec{\theta})^i{}_j x^j = (e^{i\vec{\theta}\cdot\mathcal{D}^{(1)}(\vec{J})})^i{}_j x^j \quad (10.78)$$

Podemos establecer con más precisión el homomorfismo que existe entre $SU(2)$ y $SO(3)$. Para ello comenzamos por recordar que la descomposición de Clebsh-Gordan afirma que

$$\left[\frac{1}{2}\right] \otimes \left[\frac{1}{2}\right] = [0] \oplus [1] \quad (10.79)$$

donde por $[j]$ entendemos $D^{(j)}$. En el fondo, la ecuación (10.79) lo único que dice es que un sistema ligado formado por dos magnitudes espinoriales, se transforma bajo rotaciones como un vector o como un escalar. Querriamos tener una regla explícita para construir a partir de dos espinores η y ξ dicho vector, o dicho escalar. El escalar es sencillo. De hecho hay dos posibles

$$A = \sum_{a=1}^2 \eta^a \xi^{*a} \quad ; \quad B = \eta^a \omega_{ab} \xi^b \quad (10.80)$$

⁴En efecto la posición de los índices es consistente

$$\begin{aligned}D^{-1}{}_d{}^b D^d{}_c &= \omega_{de} D^e{}_a \omega^{ab} D^d{}_c \\ &= D^d{}_c \omega_{de} D^e{}_a \omega^{ab} \\ &= (D^T \epsilon D)_{ca} \epsilon^{ab} \\ &= \epsilon_{ca} \epsilon^{ab} = \delta_c^b.\end{aligned} \quad (10.77)$$

En cuanto al vector, tenemos la ecuación

$$\boxed{x^i = \eta_a (\sigma^i)^a_b \xi^b} \quad (10.81)$$

Si esta ecuación es correcta debe transformarse bajo rotaciones con $D^{(1)}$, es decir $x'^i = D^{(1) i}_j x^j$. Por otro lado

$$\begin{aligned} x'^i = \eta'_a (\sigma^i)^a_b \xi'^b &= \eta_c (D^{(\frac{1}{2})})^c_a (\sigma^i)^a_b (D^{(\frac{1}{2})})^{-1}{}^b_d \xi^d \\ &= \eta_c \left(D^{(\frac{1}{2})} \sigma^i D^{(\frac{1}{2}) \dagger} \right)^c_d \xi^d \\ &= (D^{(1)})^i_j (\eta_c (\sigma^j)^c_d \xi^d) \\ &= (D^{(1)-1})^i_j x^j \end{aligned} \quad (10.82)$$

Si esta igualdad ha de verificarse para cualesquiera η y ξ quiere decir que debe cumplirse

$$\left(D^{(\frac{1}{2})} \sigma^i D^{(\frac{1}{2}) \dagger} \right)^c_d = D^{(1)-1}{}^i_j (\sigma^j)^c_d \quad (10.83)$$

Haciendo uso de la identidad $\text{tr } \sigma^i \sigma^j = 2\delta^{ij}$ podemos despejar, y, tomando hermitico conjugado llegamos a

$$\boxed{D^{(1) i}_j(g) = \frac{1}{2} \text{tr} \left(D^{(\frac{1}{2}) \dagger}(g) \sigma^i D^{(\frac{1}{2})}(g) \sigma^j \right)} \quad (10.84)$$

De esta ecuación deducimos que la representación $D^{(1)}$ no puede ser *fiel* en $SU(2)$ puesto que los dos elementos $\pm D^{(\frac{1}{2})}$ se aplican sobre el mismo elemento $D^{(1)}$. Esta identidad hace explícito el homomorfismo entre $SU(2)$ y $SU(3)$ mencionado en (10.19).

Por último vamos a probar que (10.84) es correcta. Para ello expandimos ambos miembros en torno a la identidad, y utilizamos el hecho de que conocemos explícitamente las representaciones del álgebra $\mathcal{D}^{(\frac{1}{2})}(J_k) = \frac{i}{2} \sigma^k$ y $(\mathcal{D}^{(1)}(J_i))^j_k = -i\epsilon_{ijk}$. Supongamos que $g = g(\theta)$ es una rotación infinitesimal $\theta^i \ll 1$

$$\begin{aligned} D^{(\frac{1}{2}) i}_j &= (e^{i\theta^k \mathcal{D}_k^{(\frac{1}{2})}})^i_j = \delta^i_j + i\theta^k (\mathcal{D}_k^{(\frac{1}{2})})^i_j + \dots \\ &= \delta^i_j + \frac{i}{2} \theta^k (\sigma_k)^i_j + \dots \end{aligned} \quad (10.85)$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{tr} \left(D^{(\frac{1}{2}) \dagger}(g) \sigma^i D^{(\frac{1}{2})}(g) \sigma_j \right) &= \frac{1}{2} \text{tr} \left(\left(1 - \frac{i}{2} \theta_k \sigma^k + \dots \right) \sigma^i \left(1 + \frac{i}{2} \theta_k \sigma^k + \dots \right) \sigma^j \right) \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} \left(\sigma^i \sigma^j - \frac{i}{2} \theta_k \sigma^k \sigma^i \sigma^j + \frac{i}{2} \theta_k \sigma^i \sigma^k \sigma^j \dots \right) \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} \left(\sigma^i \sigma^j - \frac{i}{2} \theta_k [\sigma^k, \sigma^i] \sigma^j + \dots \right) \\ &= \delta^i_j + \theta_k \epsilon^{kij} + \dots \\ &= \delta^i_j + i\theta_k (-i\epsilon^{ijk}) \dots \end{aligned} \quad (10.86)$$

y por otro lado

$$D^{(1) i}_j = (e^{i\theta^k \mathcal{D}_k^{(1)}})^i_j = \delta^i_j + i\theta^k (\mathcal{D}_k^{(1)})^i_j + \dots \quad (10.87)$$

Comparando obtenemos así

$$(\mathcal{D}_k^{(1)})^i_j = -i\epsilon_{ijk} \quad (10.88)$$

que es precisamente la representación fundamental de $SO(3)$.

Ejercicio 10.5.1 *Demostrar que el producto vectorial de dos vectores de $SO(3)$, $x_i = \epsilon^{ijk} y_j z_k$ se transforma como un vector $x'_i = D^{(1)j}_i x_j$.*

10.6. Rotaciones de Magnitudes Físicas

10.6.0.1 ¿Cómo rota el vector de posiciones ?

El vector de posición \vec{x} es un elemento del espacio vectorial \mathbf{R}^3 con componentes (x^1, x^2, x^3) en una base cartesiana, en la cual la métrica adopta la forma $g_{ij} = \delta_{ij}$. Por su dimensión, la representación que actúa sobre estas coordenadas es $D^{(1)}(g)$. Abreviaremos esta matriz con la denominación $D^{(1)}(g) = R$. Una rotación finita especificada por un eje $\theta = \theta \vec{n}$ será

$$\vec{x}' = R\vec{x} \quad \Rightarrow \quad x'^i = (D^{(1)}(g))^i_j x^j = R(\theta)^i_j x^j$$

Una rotación infinitesimal será por tanto, para $\theta \ll 1$

$$\begin{aligned} x'^i &= (D^{(1)}(g))^i_j x^j = (e^{i\theta^k \mathcal{D}^{(1)}(J_k)})^i_j x^j \\ &= (1 + i\theta^k \mathcal{D}^{(1)}(J_k) + \mathcal{O}(\theta^2))^i_j x^j \\ &= (\delta^i_j - \theta^k (L_k)^i_j + \dots) x^j \\ &= x^i - \theta^k \epsilon_{kij} x^j + \dots \\ &= x^i + (\vec{\theta} \times \vec{x})^i + \dots \end{aligned} \tag{10.89}$$

10.6.0.2 ¿Cómo rota una función?

Si $f(\vec{x})$ es una función que describe alguna magnitud física en una región del espacio, podemos preguntarnos cuál es la función $f'(\vec{x})$ que describe el sistema después de haber efectuado una rotación del aparato. Si bajo la rotación $\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = R(g)\vec{x} = R\vec{x}$. Entonces, se debe cumplir que $f(\vec{x}) \rightarrow f'(\vec{x}') = f(\vec{x})$, o lo que es igual,

$$f'(\vec{x}') = f(R^{-1}\vec{x}'). \tag{10.90}$$

Por un lado tenemos que la expresión anterior es cierta para todo valor de \vec{x}' , por tanto podemos cambiar el argumento por \vec{x} sin problemas. Por otro, como $f'(\vec{x})$ viene determinada a partir de $f(\vec{x})$ a partir de la transformación de coordenadas $R(g)$, podemos considerar que ambas están relacionadas mediante la acción de un único operador $U(g)$ que sólo depende de g . Definamos, por tanto, un operador lineal $U(g)$ sobre $L^2(\mathbb{R}^3)$ a través de la siguiente identidad

$$g : f(\vec{x}) \rightarrow f'(\vec{x}) = U(g)f(\vec{x}) = f(R(g^{-1})\vec{x}). \tag{10.91}$$

Teorema 10.6.1 *Con la definición (10.91) el conjunto de operadores lineales $\{U(g)\}$ $g \in G$ forma una representación del grupo G sobre el espacio de Hilbert L^2 .*

Demostración: Sea $\vec{y} = R^{-1}(g)\vec{x}$. Entonces

$$\begin{aligned} U(g)U(g')f(\vec{x}) &= U(g)f(\vec{y}) = f(R^{-1}(g)\vec{y}) \\ &= f(R^{-1}(g)R^{-1}(g')\vec{x}) \\ &= f(R^{-1}(gg')\vec{x}) \\ &= U(gg')f(\vec{x}). \end{aligned}$$

■

La acción infinitesimal de $U(g(\vec{\theta}))$ a primer orden en $\vec{\theta}$, define un operador \mathcal{U} que es un elemento de la representación del álgebra de Lie sobre el espacio de funciones L^2 . Por un lado tenemos

$$\begin{aligned} f'(\vec{x}) = U(g(\vec{\theta}))f(\vec{x}) &= e^{i\theta^k \mathcal{U}(J_k)} f(\vec{x}) \\ &= (1 + i\theta^k \mathcal{U}(J_k) + \dots) f(\vec{x}) \end{aligned} \quad (10.92)$$

y por otro

$$\begin{aligned} f'(\vec{x}) = f(R(-\vec{\theta})^i_j x^j) &= f(x^i - (\theta \times x)^i + \dots) \\ &= f(\vec{x}) - (\theta \times x)^i \partial_i f(\vec{x}) \\ &= f(\vec{x}) - \theta^k \epsilon_{ikj} x^j \partial_i f(\vec{x}) \end{aligned} \quad (10.93)$$

Comparando (10.92) con (10.93) llegamos a la identificación siguiente

$$\boxed{\mathcal{U}(J_k) = -i\epsilon_{kji} x^j \partial_i} \quad (10.94)$$

o, explícitamente

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(J_1) &= -i(x^2 \frac{\partial}{\partial x^3} - x^3 \frac{\partial}{\partial x^2}) \\ \mathcal{U}(J_2) &= -i(x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^3}) \\ \mathcal{U}(J_3) &= -i(x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^1}) \end{aligned} \quad (10.95)$$

Para verificar que los operadores $\mathcal{U}(J_k)$ constituyen una representación de $so(3)$ sobre L^2 podemos comprobar, mediante un cálculo sencillo, que las relaciones de conmutación se cumplen adecuadamente.

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k \quad \Rightarrow \quad [\mathcal{U}(J_i), \mathcal{U}(J_j)] = i\epsilon_{ijk} \mathcal{U}(J_k) \quad (10.96)$$

10.6.0.3 ¿Cómo rota un campo vectorial?

Conocemos bastantes ejemplos de campos vectoriales: el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{x})$, el campo magnético $\vec{A}(\vec{x})$, el campo de velocidades de un fluido $\vec{v}(\vec{x})$, etcétera. Tomemos $E^i(x^j)$ como caso ejemplar. El hecho de que estas tres funciones formen las componentes de un campo vectorial quiere decir que bajo rotaciones no se transforman como tres campos escalares independientes, sino que se mezclan entre sí en la representación $D^{(1)}$ de $SO(3)$, exactamente igual a como lo hacen las coordenadas. Más concretamente, ahora en lugar de (10.90) encontraremos

$$E'^i(\vec{x}) = R^i_j E^j(R^{-1}\vec{x}) \quad (10.97)$$

De nuevo, esta aplicación define un operador $U^{(1)}(g) : \vec{E}(\vec{x}) \rightarrow \vec{E}'(\vec{x})$. Técnicamente, este operador representa los elementos del grupo sobre el espacio vectorial $V^{(1)} \otimes L^2$. La acción infinitesimal, de nuevo nos permite definir un elemento del álgebra y su correspondiente representación. Por un lado

$$E'^i(\vec{x}) = U^{(1)}(g(\vec{\theta}))^i_j E^j(\vec{x}) = E^i(\vec{x}) + i\theta^k \mathcal{U}^{(1)}(J_k)^i_j E^j(\vec{x}) + \dots \quad (10.98)$$

$$\begin{aligned} E'^i(\vec{x}) &= R^i_j E^j((R^{-1})^l_m x^m) \\ &= (\delta^i_j + \theta^k \epsilon_{ijk} + \dots) E^j(x_l - \theta^k \epsilon_{lmk} x^m + \dots) \\ &= E^i(\vec{x}) + \theta^k \epsilon_{ijk} E^j(\vec{x}) - \delta^i_j \epsilon_{lmk} \theta^k x^m \partial_l E^j(\vec{x}) + \dots \\ &= E^i(\vec{x}) + \theta^k (\epsilon_{ijk} - \delta^i_j \epsilon_{lmk} x^m \partial_l) E^j(\vec{x}) + \dots \end{aligned} \quad (10.99)$$

Comparando con (10.98) llegamos al resultado buscado

$$\boxed{\mathcal{U}^{(1)}(J_k)^i_j = -i\epsilon_{ijk} - i\delta^i_j \epsilon_{kml} x^m \partial_l} \quad (10.100)$$

La generalización de un campo vectorial de 3 componentes, a uno de $2j + 1$ componentes que se transforme en la representación $D^{(j)}$ es inmediata. Sean $\psi_m^j(\vec{x})$, $m = j, j-1, \dots, -j$ un conjunto de $2j + 1$ funciones del espacio de representación $V^{(j)} \otimes L^2$. En lugar de (10.97) ahora tendremos

$$\psi_m^j(\vec{x}) = D^{(j)}(\theta)^{m'}_m \psi_{m'}^j(R^{-1}\vec{x}) \quad (10.101)$$

y, siguiendo los mismos pasos que llevaron a (10.100), obtenemos ahora un operador sobre este espacio

$$\boxed{\mathcal{U}^{(j)}(J_k)^{m'}_m = \mathcal{D}^{(j)}(J_k)^{m'}_m \otimes \mathbf{1} + \delta^{m'}_m \otimes \mathcal{U}(J_k)} \quad (10.102)$$

que es lo natural para una representación del álgebra actuando sobre el espacio producto $V^{(j)} \otimes L^2$.

10.6.0.4 Invariancia rotacional

Una función invariante bajo rotaciones cumple que $f'(\vec{x}) = f(\vec{x})$. A la vista de (10.94), a primer orden esto se cumple si $\mathcal{U}(J_k)f(\vec{x}) = 0$. Explícitamente

$$\epsilon_{ijk} x^j \partial^k f(\vec{x}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{x} \times \vec{\nabla} f(\vec{x}) = 0 \quad (10.103)$$

En particular esto se cumple para cualquier función $f(|\vec{x}|)$.

¿Qué podemos decir de un campo vectorial invariante bajo rotaciones? El mismo argumento nos lleva a pedir que $\vec{E}'(\vec{x}) = \vec{E}(\vec{x})$, es decir $\mathcal{U}^{(1)}(J_k)^i_j E^j = 0$. El campo vectorial invariante rotacionalmente debe verificar el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\epsilon_{lmk} x^m \partial_l E^i = \epsilon_{ijk} E^j \quad (10.104)$$

Esta ecuación la verifica cualquier función con “perfil de erizo” $E^i = x^i f(|\vec{x}|)$. Además, contrayendo con ∂_k y sumando sobre k en ambos miembros llegamos a que cualquier solución de esta ecuación tiene rotacional nulo $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ (no es condición suficiente).

10.6.0.5 Invariancia rotacional de rango superior: los armónicos esféricos

La generalización de (10.104) a espacios de representación superiores es ahora evidente. La noción de campo $(2j+1)$ -vectorial invariante bajo rotaciones involucra funciones $\psi_m^j(\vec{x})$ tales que se verifica

$$\mathcal{U}^{(j)}(J_k)\psi_m^i(\vec{x}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\mathcal{D}^{(j)}(J_k)^{m'}_m \otimes \mathbf{1} + \delta^{m'}_m \otimes \mathcal{U}(J_k) \right) \psi_m^i(\vec{x}) = 0 \quad (10.105)$$

En particular esta base la forman autoestados de los generadores $J^2 = (\vec{J})^2$ y J_3 , por tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(j)}(J^2)^{m'}_m \psi_{m'}^j(\vec{x}) &= j(j+1)\psi_m^j(\vec{x}) \\ \mathcal{D}^{(j)}(J_3)^{m'}_m \psi_{m'}^j(\vec{x}) &= m\psi_m^j(\vec{x}). \\ \mathcal{D}^{(j)}(J_\pm)^{m'}_m \psi_{m'}^j(\vec{x}) &= \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\psi_{m \pm 1}^j(\vec{x}) \end{aligned} \quad (10.106)$$

Si en lugar de trabajar en coordenadas cartesianas (x^1, x^2, x^3) utilizamos coordenadas polares, (r, θ, ϕ) , los operadores diferenciales (10.95) adoptan la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(J_1) &= i \left(\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ \mathcal{U}(J_2) &= -i \left(\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ \mathcal{U}(J_3) &= -i \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (10.107)$$

que verifican el mismo álgebra (10.96), como se debe comprobar. De forma que las ecuaciones que expresan la invariancia bajo rotaciones, (10.105), ahora son

$$\left\{ \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi^2} \right\} \psi_m^j(\vec{x}) = j(j+1) \psi_m^j(\vec{x}) \quad (10.108)$$

$$-i \frac{\partial}{\partial \phi} \psi_m^j(\vec{x}) = m \psi_m^j(\vec{x}) \quad (10.109)$$

$$e^{\pm i\phi} \left\{ -\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right\} \psi_m^j(\vec{x}) = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \psi_{m \pm 1}^j(\vec{x}) \quad (10.110)$$

Empezaremos solucionando estas ecuaciones por (10.109) que implica $\psi_m^j(r, \theta, \phi) = e^{im\phi} f_m^j(r, \theta)$. Si ahora sustituimos esta función en la ecuación (10.108) obtenemos

$$\left\{ \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2 \theta} \right\} f_m^j(r, \theta) = j(j+1) f_m^j(r, \theta). \quad (10.111)$$

Esta ecuación es conocida en la teoría de ecuaciones diferenciales como la *Ecuación Asociada de Legendre*, cuyas soluciones adoptan la forma

$$f(r, \theta) = P_j^m(\cos \theta) F(r) \quad (10.112)$$

con $F(r)$ una función genérica y $P_j^m(\cos \theta)$ la función asociada de Legendre, que puede definirse en términos de los *Polinomios de Legendre*, $P_j(\cos \theta)$ mediante

$$P_j^m(\cos \theta) = (\operatorname{sen} \theta)^m \frac{d^m}{d(\cos \theta)^m} P_j(\cos \theta). \quad (10.113)$$

para $m = 0, 1, 2, \dots, j$ y por

$$P_j^m(\cos \theta) = (-1)^m \frac{(j-m)!}{(j+m)!} P_j^m(\cos \theta) \quad (10.114)$$

para $m = -1, -2, \dots, -j$.

Con los *armónicos esféricos* $Y_j^m(\theta, \phi)$ definidos en la forma

$$Y_j^m(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2j+1)(j-m)!}{4\pi(j+m)!}} e^{im\phi} P_j^m(\cos \theta), \quad (10.115)$$

las ecuaciones (10.108), (10.109) y (10.110) se satisfacen con las funciones ⁵

$$\psi_m^j(\vec{x}) = Y_j^m(\theta, \phi) R(r). \quad (10.118)$$

La gran ventaja de las funciones (10.118) es que tienen controlado su comportamiento bajo rotaciones. Concretamente, bajo rotaciones finitas $\vec{x} \rightarrow R\vec{x}$ verifican que

$$\psi_m^j(\vec{x}) = D^{(j)}(g)^{m'} {}_m \psi_{m'}^j(R(g)^{-1} \vec{x}) \quad (10.119)$$

⁵Si ψ_m^j han de formar una base ortonormal, dada la propiedad de ortonormalidad de los armónicos esféricos

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{jm}^*(\theta, \phi) Y_{j'm'}(\theta, \phi) \operatorname{sen} \theta d\theta d\phi = \delta_{jj'} \delta_{mm'}. \quad (10.116)$$

tenemos que $R(r)$ es cualquier función de r , tal que

$$\int_0^\infty |R(\vec{x})|^2 r^2 dr = 1. \quad (10.117)$$

de la que la ecuación (10.105) no es más que la versión infinitesimal de (10.119).

$$\begin{aligned}
Y_0^0(\theta, \phi) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\
Y_1^1(\theta, \phi) &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \operatorname{sen} \theta e^{i\phi} \\
Y_1^0(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \\
Y_1^{-1}(\theta, \phi) &= +\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \operatorname{sen} \theta e^{-i\phi} \\
Y_2^2(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{5}{96\pi}} 3 \operatorname{sen}^2 \theta e^{2i\phi} \\
Y_2^1(\theta, \phi) &= -\sqrt{\frac{5}{24\pi}} 3 \operatorname{sen} \theta \cos \theta e^{i\phi} \\
Y_2^0(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - 1 \right) \\
Y_2^{-1}(\theta, \phi) &= +\sqrt{\frac{5}{24\pi}} 3 \operatorname{sen} \theta \cos \theta e^{-i\phi} \\
Y_2^{-2}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{5}{96\pi}} 3 \operatorname{sen}^2 \theta e^{-2i\phi}
\end{aligned}$$

Primeros armónicos esféricos.

Ejercicio 10.6.1 *Demostrar que el cambio de base (10.46) transforma las funciones $\psi_m^1(\vec{x})$ en funciones vectoriales cartesianas de la forma $E^i(\vec{x}) = \vec{x}^i f(|\vec{x}|)$.*

10.6.0.6 Armónicos Esféricos de $SU(2)$

Con respecto a $SU(2)$, consideramos que la representación que define el grupo $D^{(\frac{1}{2})}$ actúa sobre el espacio vectorial \mathbb{C}^2 formado por pares $\vec{z} = (z_1, z_2)$ de números complejos.

De nuevo, podemos considerar una representación del álgebra $su(2)$ en forma de operadores diferenciales de primer orden que verifican bajo conmutación las mismas relaciones que los propios generadores J_i .

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(J_1) &= -\frac{1}{2}(z_2 \partial_{z_1} + z_1 \partial_{z_2}) \\
\mathcal{U}(J_2) &= +\frac{i}{2}(z_2 \partial_{z_1} - z_1 \partial_{z_2}) \\
\mathcal{U}(J_3) &= -\frac{1}{2}(z_1 \partial_{z_1} - z_2 \partial_{z_2})
\end{aligned} \tag{10.120}$$

10.6.0.7 De nuevo buscamos una base de autofunciones $\psi_m^j(\vec{z})$ que satisfagan el análogo de las relaciones (10.105)

$$\mathcal{U}(J_k) \psi_m^j(\vec{z}) = \mathcal{D}^{(j)}(J_k)^{m'} {}_m \psi_{m'}^j(\vec{z}) \tag{10.121}$$

donde, ahora, $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$. La solución es

$$\psi_m^j(\vec{z}) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{(j-m)!(j+m)!}} z_1^{j-m} z_2^{j+m}. \tag{10.122}$$

y la mejor manera de comprobarlo consiste en actuar directamente con los operadores diferenciales que representan a los generadores J_{\pm} y J_3

$$J_+ = -z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} , \quad J_- = -z_1 \frac{\partial}{\partial z_2} , \quad J_3 = -\frac{1}{2} \left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \right) . \quad (10.123)$$