Problemas de Métodos Matemáticos IV

Curvas y Superficies

Boletín 1

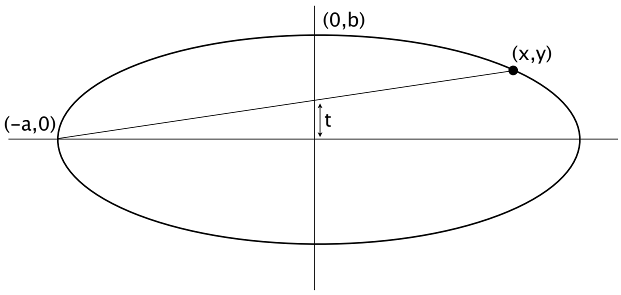
Octubre de 2009

---

1. Demostrar que $\vec{x}(t) = (t, t^2+1, (t-1)^3)$ es una representación paramétrica regular, y comprobar que la curva que define es la intersección de las dos superficies $x_2 = x_1^2+1$ y $x_3 = (x_1 - 1)^3$.

2. Considerar la curva definida por la ecuación $r = 2 \operatorname{sen} \theta \tan \theta$, donde r y θ son coordenadas polares planas y $\theta \in (-\pi/2, +\pi/2)$. Escribir una representación paramétrica, dibujar la curva y determinar si dicha representación es regular.

3. Construir una representación paramétrica de la elipse de semiejes a y b utilizando como parámetro la longitud t indicada en la figura. Estudiar si la representación paramétrica obtenida es regular y si describe todos los puntos de la elipse.



4. Un disco de radio R rueda sin deslizar hacia la derecha con velocidad v sobre una recta. a) Deducir la ecuación de la trayectoria que describe un punto del disco que inicialmente se encuentra a distacia $r \leq R$ bajo el centro. b) Dibujar la trayectoria y estudiar si es regular (cuando $r = R$ la curva es conocida como *cicloide*).

5. El extremo inferior de un segmento situado originalmente entre los puntos $(0, 0)$ y $(0, 1)$ se desplaza a lo largo del eje-x. Al mismo tiempo el extremo superior describe una curva respecto a la cual el segmento se mantiene siempre tangente. Deducir la ecuación de la curva (*tractrix*), dibujarla y estudiar si es una curva regular.

[Solución: $\vec{x}(\theta) = \big(\cos\theta + \ln\tan(\theta/2),\ \operatorname{sen}\theta\big)$ *con* $\theta \in [\pi/2, \pi)$*.]*

6. Demostrar que

$$\vec{x}(\theta) = \frac{1}{2}\left(\theta + \sqrt{\theta^2+1}\right)\ \vec{e}_1 + \frac{1}{2}\left(\theta + \sqrt{\theta^2+1}\right)^{-1}\ \vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(\theta + \sqrt{\theta^2+1}\right)\ \vec{e}_3$$

es una representación paramétrica natural.

7. Introducir la longitud de arco como parámetro en la curva

$$\vec{x}(t) = \mathrm{e}^t \cos t\, \vec{e}_1 + \mathrm{e}^t \operatorname{sen} t\, \vec{e}_2 + \mathrm{e}^t\, \vec{e}_3\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

8. Se conoce como *catenaria* a la curva que adopta una cadena, cuerda o cable ideal perfectamente flexible, con masa distribuida uniformemente por unidad de longitud, suspendida por sus extremos y sometida a la acción de un campo gravitatorio uniforme. Deducir la ecuación de la catenaria, dibujarla y estudiar si es una curva regular.

[Solución: $y = C \cosh\big((x - x_0)/C\big) + y_0$.*]*

9. Introducir la longitud de arco como parámetro en la ecuación de la catenaria.

10. Demostrar que la distancia más corta entre dos puntos situados sobre la superficie de una esfera corresponde al arco del (único) círculo máximo que los une.

[Nota: Siempre podemos elegir el sistema de coordenadas de tal manera que los dos puntos sean $(R \operatorname{sen} \theta_0, 0, R \cos \theta_0)$ *y* $(0, 0, R)$.*]*

11. Calcular el triedro móvil, la curvatura y la torsión de las curvas

a) $\vec{x} = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$.

b) $\vec{x} = (\mathrm{e}^{\,t}(\operatorname{sen} t + \cos t)/2, \mathrm{e}^{\,t}(\operatorname{sen} t - \cos t)/2, \mathrm{e}^{\,t})$.

12. Demostrar que en todo punto de una curva regular $x = \vec{x}(t)$ la curvatura viene dada por la expresión

$$\kappa = \frac{|\vec{x}' \times \vec{x}''|}{|\vec{x}'|^3} \; .$$

13. Calcular los valores máximo y mínimo del radio de curvatura de una elipse.

14. Demostrar que en todo punto de una curva $x = \vec{x}(t)$ regular sin puntos de inflexión la torsión viene dada por la expresión

$$\tau = \frac{\vec{x}' \cdot [\vec{x}'' \times \vec{x}''']}{[\vec{x}' \times \vec{x}'']^2} \; .$$

15. Una curva paramétrica regular tiene la propiedad de que todas sus rectas tangentes pasan por un punto fijo. Demostrar que la curva es (un segmento de) una recta.

16. Una curva paramétrica regular tiene la propiedad de que todas sus planos normales contienen un punto fijo. Demostrar que la curva está contenida en una esfera.

17. Deducir las ecuaciones intrínsecas de la catenaria $\vec{x} = a \cosh(t/a)\, \vec{e}_1 + t\, \vec{e}_2$.

18. Determinar la curva cuyas ecuaciones intrínsecas son

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{2as}} \; , \quad \tau = 0 \; , \qquad a > 0 \; , \quad s > 0 \; .$$

19. Demostrar que si la curvatura y la torsión de una curva son constantes y no nulas, entonces la curva es una hélice circular.