Problemas de Métodos Matemáticos IV

Curvas y Superficies

`Boletín 2`

Octubre/Noviembre de 2009

---

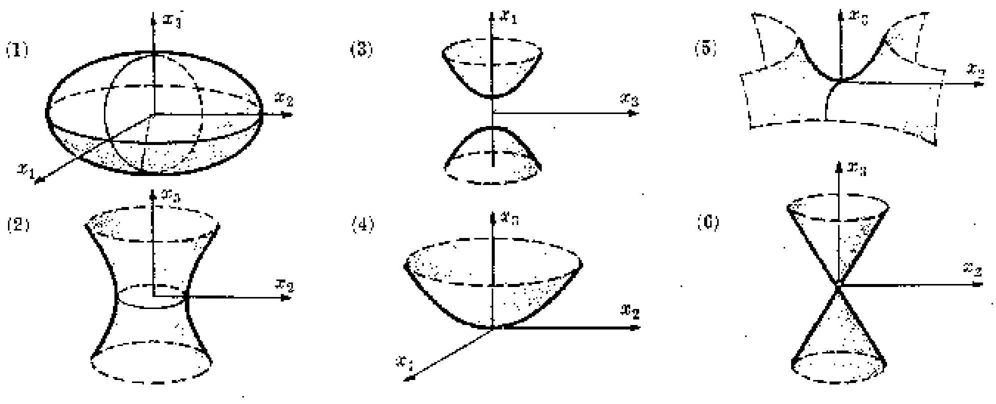
20. Describir la esfera $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$ mediante dos cartas locales utilizando la *proyección estereográfica*, que consiste en especificar un punto $\vec{x} = (x, y, z)$ mediante la intersección del plano $z = 0$ y la recta que une los puntos $\vec{x}$ y $(0, 0, 2R)$ (*polo norte*), o mediante la intersección del plano $z = 2R$ y la recta que une los puntos $\vec{x}$ y $(0, 0, 0)$ (*polo sur*).

21. Se denomina *toro* a la superficie de revolución que se obtiene haciendo girar una circunferencia $\vec{x}_C = \big(0, a + b\cos u, b \operatorname{sen} u\big)$ alrededor del eje x_3 cuando $a > b$. Construir una representación paramétrica regular para el toro y describir sus curvas paramétricas.

22. Las superficies definidas mediante ecuaciones de la forma

$$f = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{3} b_i x_i + c = 0$$

se denominan *cuádricas* o superficies cuadráticas. Salvo rotaciones y traslaciones de ejes, se puede demostrar que los casos no triviales corresponden a alguno de los seis siguientes dibujados en la figura:



1) Elipsoide: $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} + \dfrac{x_3^2}{c^2} = 1$

2) Hiperboloide de una hoja: $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} - \dfrac{x_3^2}{c^2} = 1$

3) Hiperboloide de dos hojas: $\dfrac{x_1^2}{a^2} - \dfrac{x_2^2}{b^2} - \dfrac{x_3^2}{c^2} = 1$

4) Paraboloide elíptico: $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} - x_3 = 0$

5) Paraboloide hiperbólico: $\dfrac{x_1^2}{a^2} - \dfrac{x_2^2}{b^2} - x_3 = 0$

6) Cono cuádrico: $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} - \dfrac{x_3^2}{c^2} = 0\,, \quad (x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0)\,.$

Proponer representaciones paramétricas para cada una de ellas.

23. Calcular los coeficientes de la primera forma fundamental (E, F, G) para las siguientes representaciones paramétricas:

a) Una esfera en coordenadas esféricas.

b) Una esfera en coordenadas estereográficas (ver problema 20). Comprobar que esta representación es conforme.

c) La representación del toro construida en el problema 21.

24. Determinar la función $f = f(u)$ para que la representación paramétrica de la esfera

$$\vec{x} = R\big(\operatorname{sen} f(u) \cos v,\ \operatorname{sen} f(u) \operatorname{sen} v, \cos f(u)\big) = \vec{x}(u,v)$$

sea conforme (*proyección de Mercator*).

25. Considerar la imagen de la cuva regular definida por $\theta = \log t$, con $\phi = 2\arctan(t)$ y $t > 0$, sobre la esfera $\vec{x} = \cos\theta \operatorname{sen}\phi\, \vec{e}_1 + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi\, \vec{e}_2 + \cos\phi\, \vec{e}_3$. Demostrar que la curva forma un ángulo constante igual a $\pi/4$ con los meridianos (se llama curva *loxodrómica* a aquella que, definida sobre la superficie de una esfera, corta a todos los meridianos con el mismo ángulo).

Dibujar la curva en el plano (θ, ϕ) (coordenadas esféricas), y en el plano correspondiente a las coordenadas utilizadas en el problema 24 (proyección de Mercator).

26. Calcular la longitud del arco $(u, \theta) = (\mathrm{e}^t, t)$, con $0 \leq t \leq \pi$, sobre el cono descrito por la carta local $\vec{x} = u\cos\theta\ \vec{e}_1 + u \operatorname{sen}\theta\ \vec{e}_2 + u\ \vec{e}_3$.

27. Calcular el área del paraboloide definido por la ecuación

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0 \quad \text{con} \quad 0 < x_3 < H\,.$$

28. Calcular el área de la esfera utilizando las cartas locales proporcionadas por la proyección estereográfica (ver problemas 20 y 23b).

29. Calcular el área del cono de altura H y radio R definido por la ecuación

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{R^2} - \frac{x_3^2}{H^2} = 0 \quad \text{con} \quad 0 < x_3 < H\,.$$

30. Dada una curva regular cerrada sobre la esfera de radio unidad. Demostrar que:

(i) su curvatura satisface: $\kappa(s) \geq 1$.

(ii) en un punto en el que la curvatura es máxima, $\tau(s) = 0$.