Problemas de Métodos Matemáticos IV

Curvas y Superficies

Boletín 3

Noviembre de 2009

---

31. Verificar el teorema de Green para un disco centrado en el origen y radio R y los campos siguientes:

$$\begin{aligned}&(a)\ \ \vec{F}(x,y) = x^2y\,\vec{e}_1 - xy^2\,\vec{e}_2\,,\\ &(b)\ \ \vec{F}(x,y) = \big(f(x)+y\big)\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2\,,\end{aligned}$$

donde f es una función continua y acotada arbitraria.

32. Verificar el teorema de Green para el campo $\vec{F} = \cos x\,\vec{e}_1 + x\,\vec{e}_2$ en la región limitada por la elipse $x^2/9 + y^2/4 = 1$ y la circunferencia $(x+1)^2 + y^2 = 1$.

33. Usar el teorema de Green para calcular el área de la región del plano encerrada por la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (*hipocicloide*) usando la parametrización

$$x = a\cos^3\theta\,, \quad y = a\,\mathrm{sen}^3\,\theta\,, \quad \theta \in [0, 2\pi]\,.$$

Dibujar la curva.

34. Utilizar el teorema de Green para demostrar la identidad

$$\oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = \begin{cases} 0\,, & \text{si } (0{,}0) \text{ no está en el interior de la curva } C \\ 2\pi\,, & \text{si } (0{,}0) \text{ está en el interior de la curva } C\,, \end{cases}$$

donde C es una curva de Jordan regular a trozos orientada en sentido contrario al del giro de las agujas de un reloj.

35. Comprobar el teorema de Stokes para el campo vectorial $\vec{F} = -y^3\,\vec{e}_1 + x^3\,\vec{e}_2 - z^3\,\vec{e}_3$ en la superficie definida por la intersección del cilindro $x^2 + y^2 \le 1$ y el plano $x + y + z = 1$.

36. Comprobar el teorema de Stokes para el campo vectorial $\vec{F} = -y^3\,\vec{e}_1 + x\,\vec{e}_2 + \mathrm{e}^{-z}\,\vec{e}_3$ en la superficie correspondiente al cono cuádrico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{(z-c)^2}{c^2} = 0\,, \quad c > 0\,,$$

con $x, y \ge 0$ y $0 \le z \le c$.

37. Comprobar si los siguientes campos vectoriales son conservativos y, en caso afirmativo, encontrar un campo escalar $f = f(x,y,z)$ para el que se cumpla $\vec{F} = \vec{\nabla} f$:

$$\begin{aligned}&(a)\ \ \vec{F}(x,y,z) = (x^2+y^2)\,\vec{e}_1 + 2xy\,\vec{e}_2\,,\\ &(b)\ \ \vec{F}(x,y,z) = (x^2+1)\,\vec{e}_1 + (z-2xy)\,\vec{e}_2 + y\,\vec{e}_3\,.\end{aligned}$$

38. Comprobar el teorema de Gauss para el campo vectorial $\vec{F} = 2z\,\vec{e}_1 + x\,\vec{e}_2 + y^2\,\vec{e}_3$ en la región sólida limitada por el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ y el plano $z = 0$.

39. Sea $V \subset R^3$ la región sólida limitada por el hiperboloide de una hoja $x^2+z^2 = 1+y^2$ y los planos $y = -1$, $y = +1$, y $z = 0$, con $z \geq 0$.

i) Dibujar V y orientar su frontera para que se cumpla el teorema de Gauss.

ii) Comprobar que se cumple el teorema de Gauss en V para el campo

$$\vec{F} = x\,\vec{e}_1 + g(x, y)\,\vec{e}_3\,,$$

donde $g = g(x, y)$ es una función arbitraria de clase ≥ 1.

40. Calcular la integral de superficie (flujo) del campo vectorial $\vec{F} = (x^2 + \operatorname{sen} z)\,\vec{e}_1 + (xy + \cos z)\vec{e}_2 + \mathrm{e}^{\,y}\vec{e}_3$ sobre la frontera de la región limitada por el cilindro $x^2+y^2 = 4$ y los planos $x + z = 6$ y $z = 0$.

41. Utilizar el teorema de Gauss para demostrar la identidad

$$\oint_{\partial M} \frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{r^3} d\sigma = \begin{cases} 0\,, & \text{si } (0{,}0{,}0) \text{ no está en el interior de } M \\ 4\pi\,, & \text{si } (0{,}0{,}0) \text{ está en el interior de } M\,, \end{cases}$$

donde M es una región sólida, $\vec{n}\,d\sigma$ es el elemento de superficie correspondiente a su frontera ∂M orientado hacia el exterior, y el punto $(0, 0, 0) \notin \partial M$.