Problemas de Métodos Matemáticos IV

Ecuaciones diferenciales ordinarias y funciones especiales

Boletín 4

Noviembre de 2009

---

42. Demostrar que si $q(x) < 0$ y si $u(x)$ es una solución no trivial de la ecuación diferencial homogénea de 2 orden en forma normal

$$\frac{d^2u}{dx^2} + q(x)\ u(x) = 0 \ ,$$

entonces $u(x)$ tiene a lo sumo un cero.

43. Sea $u(x)$ cualquier solución no trivial de

$$\frac{d^2u}{dx^2} + q(x)\ u(x) = 0 \ ,$$

donde $q(x) > 0$ para todo $x > 0$. Si

$$\int_1^\infty q(x)dx = \infty,$$

demostrar que entonces $u(x)$ tiene infinitos ceros en el semieje x positivo.

44. Probar que los ceros de las funciones $a\ \sin(x) + b\ \cos(x)$ y $c\ \sin(x) + d\ \cos(x)$ son distintos y alternados siempre que $ad - bc \neq 0$.

45. Hallar la forma normal de la ecuación de Bessel

$$x^2\ \frac{d^2y}{dx^2} + x\ \frac{dy}{dx} + (x^2 - p^2)\ y(x) = 0,$$

y usarla para demostrar que toda solución no trivial tiene infitos ceros positivos.