Problemas de Métodos Matemáticos IV

Ecuaciones diferenciales ordinarias y funciones especiales

Boletín 5

Diciembre de 2009

---

46. Convertir la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + \lambda y(x) = 0$$

en la forma de Sturm-Liouville.

47. Considérese el problema de Sturm-Liouville en el intervalo [0,1]

$$\frac{d}{dx}\left(e^{2x}\,\frac{dy}{dx}\right) + \lambda e^{2x}\,y(x) = 0,$$

con condiciones de contorno $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.
i) Determinar los autovalores y sus correspondientes autofunciones.
ii) Dibujar las 3 primeras autofunciones (valores $n = 1, 2, 3$) y especificar las posiciones de sus ceros en el intervalo que estamos estudiando.

48. Considérese el problema de Sturm-Liouville en el intervalo [1,2] dado por:

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\,\frac{dy}{dx}\right) = -\lambda\,y(x),$$

con condiciones de contorno $y(1) = 0$, $y(2) = 0$ (condiciones de Dirichlet).
i) Demostrar que las autofunciones y autovalores de la ecuación vienen dadas por:

$$\lambda_n = \frac{1}{4} + \frac{(n\pi)^2}{(\ln 2)^2}\ ,\quad y_n(x) = \frac{1}{\sqrt{(x)}}\sin\left(\frac{n\pi\ln x}{\ln 2}\right).$$

ii) Verificar que las autofunciones satisfacen la propiedad de ortogonalidad.
NOTA: Recordar la ecuación de Euler, cuyas soluciones tienen la forma $y(x) = x^r, r =$constante,

$x^{i\alpha} = \cos(\alpha\ln x) + i\sin(\alpha\ln x)$.

49. i) Bajo que condiciones del parámetro α el problema de Sturm-Liouville en el intervalo [0,1]:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda\,y(x) = 0\ ,\quad \alpha y(0) + y'(0) = y'(1) = 0$$

tiene autovalores negativos?
ii) Estudiar los diferentes casos, $\lambda < 0,\ \lambda = 0,\ \lambda > 0$.

50. Encontrar los autovalores y sus correspondientes autofunciones de

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + (1-\lambda)y(x),\quad 0 < x < \pi,$$

con condiciones de contorno $y'(0) = y'(\pi) = 0$. Verificar la ortogonalidad si $\lambda < 0$.

51. Escribir la ecuación de Bessel

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \beta^2)y(x) = 0$$

como una ecuación de Sturm-Liouville.