Problemas de Métodos Matemáticos IV

Funciones especiales

`Boletín 8`

Marzo de 2010

---

1. Demuestra que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

2. Calcula $(1/2)!$ y $(3/2)!$; encuentra una expresión general para $(n+1/2)!$ y $(n-1/2)!$.

3. Mediante los cambios $z = a\,x^b$, $w = y\,x^c$,

- Transforma la ecuación de Airy, $y'' + x\,y = 0$, y encuentra la solución general.
- Transforma las ecuaciones $4x^2y'' + 4xy' + (x^2 - p^2)y = 0$, y, $xy'' - y' + xy = 0$ en ecuaciones de Bessel.

4. Demuestra que $\frac{d}{dx}[x^{-p}J_p(x)] = -x^{-p}J_{p+1}(x)$.

5. Encuentra la expansión de Bessel-Fourier para las funciones

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ 0 \leq x < 1/2, \\ 1/2 & \text{si } \ x = 1/2, \\ 0 & \text{si } \ 1/2 < x \leq 1, \end{cases}$$

(para $p = 0$), y $f_2(x) = x^p$, $0 \leq x \leq 1$. Emplea el último resultado para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2} = \frac{1}{4(p+1)}\ , \qquad \text{con} \quad \lambda_n,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

los ceros positivos de la función $J_p(x)$.

6. Función generatriz de las funciones de Bessel.

- Multiplica las series correspondientes a $e^{xz/2}$ y $e^{-x/(2z)}$ para obtener que

$$e^{x(z-1/z)/2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n\ .$$

- Empleando esta función generatriz, demuestra que

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\theta\, \cos\left(n\theta - x\sin\theta\right).$$

7. Empleando la función generatriz de los polinomios de Legendre:

- Demuestra la relación $(p+1)\,P_{p+1}(x) = (2p+1)\,x\,P_p(x) - p\,P_{p-1}(x)$.

- Encuentra los valores de $P_{2p+1}(0)$ y $P_{2p}(0)$.

8. Demuestra que:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1-2xz+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z^{2n}}{2n+1} \ .$$

9. Encuentra los tres primeros términos de la serie de Legendre de las funciones $f_1(x) = x\,\theta(x)$ y $f_2(x) = e^x$, con $-1 \leq x \leq 1$ (la función escalón o de Heavyside se define tal que $\theta(x) = 1$ para $x > 0$ y $\theta(x) = 0$ para $x < 0$).

10. Prueba que si $p(x)$ es un polinomio de grado n tal que $\int_{-1}^{1} dx\, x^k\, p(x) = 0$ para todo $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, entonces $p(x)$ es proporcional a $P_n(x)$.

11. Usando la fórmula de Rodrigues para los polinomios de Hermite, encuentra los de grado 1, 2 y 3, y demuestra que $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)$.

12. Demuestra que

$$x\, L_n'(x) = n[L_n(x) - L_{n-1}(x)] \quad \text{y} \quad (n+1)\, L_{n+1}(x) = (2n+1-x)\, L_n(x) - n\, L_{n-1}(x) \ .$$

A partir de la fórmula de recurrencia de los polinomios de Laguerre, $c_{n+1} = -(p-n)c_n/(n+1)^2$, $\forall n \geq 0$, expresa todos los coeficientes $\{c_k; k \geq 0\}$ en función de c_0.

13. Expresa la ecuación de los polinomios de Legendre como un caso particular de la ecuación de la función hipergeométrica. Haz lo mismo para la ecuación de los polinomios de Laguerre.

14. Verifica las siguientes igualdades:

$$(1+x)^p = F(-p, b, b\,; -x) \ , \qquad \ln(1+x) = x\, F(1, 1, 2\,; -x),$$

$$\text{arcsen}\, x = x\, F(1/2, 1/2, 3/2\,; x^2) \ , \qquad e^x = \lim_{b\to\infty} F(a, b, a\,; x/b) \ .$$

15. Ecuación de Chebyshev.

- Encuentra la solución general en serie de potencias alrededor de $x_0 = 0$ de la ecuación de Chebyshev,

  $$(1-x^2)\, y'' - x\, y' + p^2\, y = 0 \ , \qquad p \geq 0 \ .$$

  Observa que para $p = n$ número entero, las soluciones son polinomios.

- Repite el apartado anterior tratando la ecuación de Chebyshev como una ecuación hipergeométrica cerca de $x_0 = 1$ (haz el cambio $t = (1-x)/2$).

- Demuestra que la relación $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ define los polinomios de Chebyshev del apartado anterior, y encuentra una expresión para ellos como suma de un número finito de potencias.