ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES

1. **Introducción**

   Relación entre la física y las EDP.

   Definiciones: Gradiente y Laplaciano

   1.1 Sistemas físicos estacionarios o en equilibrio. Ej.: Ecuación de Laplace, ecuación de Poisson

   1.2 Procesos de uniformización o de difusión. Ej: Ecuación del calor

   1.3 Fenómenos oscilatorios. Ej: Ecuación de ondas

2. **Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de 1er orden:**

   2.1 Coeficientes constantes: Método de cambio de variables mediante una rotación, transformación en EDO

   2.2 Coeficientes no constantes, homogéneas: Método de curvas características (método de Lagrange)

3. **Clasificación de las EDP de 2º orden:**

   Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de 2º orden, en dos variables.

   Forma general

$$a_{11}(x,y)\ u_{xx} + 2a_{12}(x,y)\ u_{xy} + a_{22}(x,y)\ u_{yy} + F\left(x,y,u,u_x,u_y\right) = 0$$

   Búsqueda de la forma canónica mediante cambio de variable y anulación de $\tilde{a}_{11}$ y $\tilde{a}_{22}$:

$$\tilde{a}_{11}(\xi,\eta)\ u_{\xi\xi} + 2\tilde{a}_{12}(\xi,\eta)\ u_{\xi\eta} + \tilde{a}_{22}(\xi,\eta)\ u_{\eta\eta} + \tilde{F}\left(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta\right) = 0$$

   Clasificación mediante el signo del discriminante $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$

   3.1 Ecuación Diferencial Hiperbólica: Δ>0

   1ª Forma canónica $u_{\xi\eta} + \hat{F}\left(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta\right) = 0$

   2ª Forma canónica $u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + \bar{F}\left(\alpha,\beta,u,u_\alpha,u_\beta\right) = 0$

   Ej: Ecuación de ondas $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$

   3.2 Ecuación Diferencial Elíptica: Δ<0

   Forma canónica $u_{\phi\phi} + u_{\psi\psi} + \tilde{F}(u_\phi, u_\psi, u, \phi, \psi) = 0$

   Ej.: Ecuación de Poisson $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho(x,y)$

   3.3 Ecuación Diferencial Parabólica: Δ=0

   Forma canónica $u_{\eta\eta} + \hat{F}(u_\xi, u_\eta, u, \xi, \eta) = 0$

   Ej.: Ecuación del calor $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}$

4. **Condiciones de contorno**
   Condiciones iniciales o de frontera
   4.1 Condiciones de Dirichlet: $u(x,y)$ en la frontera
   4.2 Condiciones de Neumann: ∇u en la frontera
   4.3 Condiciones de Cauchy: u y du/dt en t=0 inicial

5. **Ecuaciones de Euler:**
   Caso particular de EDP de 2º orden, coeficientes constantes
   $$a\ u_{xx} + 2b\ u_{xy} + c\ u_{yy} = 0$$
   5.1 Ecuación de Euler Hiperbólica
   5.2 Ecuación de Euler Elíptica
   5.3 Ecuación de Euler Parabólica

6. **Ecuación de ondas**
   Caso particular de ecuación de Euler hiperbólica
   6.1 Ecuación de ondas en la recta real
   $$u_{xx} - \frac{1}{c^2}u_{tt} = 0\ , \qquad -\infty < x < \infty\ , \quad t \geq 0$$
   Condiciones de Cauchy
   Solución de D'Alembert
   $$u(x,t) = \frac{1}{2}\ \left(f(x-ct) + f(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\ g(\xi)\ d\xi$$
   6.2 Ecuación de ondas en la semirecta real
   Condición de Dirichlet homogénea
   Condición de Neumann homogénea
   6.3 Ecuación de ondas en un segmento
   Condición de Dirichlet homogénea
   Condición de Neumann homogénea

7. **Metodo de separación de variables**
   Aplicación a la ecuación de ondas (ejemplo de ecuación hiperbólica)

8. **Ecuación de Laplace**
   Aplicación del método de separación de variables (ejemplo de ecuación elíptica)
   8.1 Ecuación de Laplace en 2 dim: Problema de Dirichlet en el círculo
   8.2 Ecuación de Laplace en 3 dim: Coordenadas esféricas
   8.2.1 Potencial eléctrico creado por una esfera cargada uniformemente
   8.2.2 Esfera conductora sometida a un campo eléctrico uniforme

9. **Ecuación del calor**
   Aplicación del método de separación de variables (ejemplo de ecuación parabólica)
   9.1 Barra con extremos a temperatura fija
   9.2 Ecuación del calor inhomogénea