MÉTODOS MATEMÁTICOS IV, curso 2007/2008

Convocatoria de Fin de Carrera *(22 de enero de 2008)*

- ♣ Hacer constar en cada hoja el nombre y DNI del alumno.
- ♣ Cada pregunta debe responderse en hoja aparte. La puntuación máxima de cada pregunta se indica entre corchetes.
- ♣ Tiempo: **4 horas**.

[1.0] 1) Deducir las ecuaciones intrínsecas de la curva descrita por la representación paramétrica

$$\vec{x} = \cosh(\mathrm{e}^{\,t})\,\vec{e}_1 + \mathrm{e}^{\,t}\,\vec{e}_2 \,.$$

[Algunas fórmulas: $\kappa = |\vec{x}\,' \wedge \vec{x}\,''|/|\vec{x}\,'|^3, \quad \tau = \vec{x}\,' \cdot [\vec{x}\,'' \wedge \vec{x}\,''']/[\vec{x}\,' \wedge \vec{x}\,'']^2.$ *]*

[2.0] 2) Considérese la representación paramétrica

$$\vec{x} = \vec{x}(r,\theta) = r\cos\theta\,\vec{e}_1 + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{e}_2 + \ln r\,\vec{e}_3 \,,$$

y sea S la superficie

$$S = \{\vec{x}(r,\theta) \mid 1 \le r \le R\,,\ 0 < \theta \le 2\pi\} \cup \Big\{(x,y,0) \mid x^2+y^2 \le 1\Big\} \ .$$

a) Dibujar S indicando su orientación y la de su frontera para que se cumpla el teorema de Stokes.

b) Comprobar que se cumple el teorema de Stokes en S para el campo vectorial

$$\vec{F} = z\,(y\,\vec{e}_1 - x\,\vec{e}_2) + f(z)\,\vec{e}_3 \,,$$

donde $f = f(z)$ es una función arbitraria de clase ≥ 1.

[2.5] 3) Para a ecuación diferencial

$$3x\frac{d^2y(x)}{dx^2} + \frac{dy(x)}{dx} + 6x\ln(1+x)\,y(x) = 0, \quad x \ge 0 \ :$$

a) Da a relación de recurrencia entre os coeficientes das series que son solución da ecuación en torno ao punto regular singular $x_0 = 0$.

b) Indica os tres primeiros termos non nulos de cada unha das series solución. Son linealmente independentes?

[0.8] 4) Sexa a ecuación hiperxeométrica

$$s(1-s)\frac{d^2y(s)}{ds^2}+[c-(a+b+1)s]\frac{dy(s)}{ds}-aby(s)=0\,,$$

con a,b,c constantes. A sua primeira solución é a función hiperxeométrica

$$F(a,b,c;s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}\,s^n\,,\quad (t)_n=t(t+1)(t+2)\dots(t+n-1)\,.$$

Usando o cambio de variable $x=bs$ obtén a ecuación hiperxeométrica confluente

$$x\frac{d^2y(x)}{dx^2}+[c-x]\frac{dy(x)}{dx}-ay(x)=0$$

mediante o límite $b\to\infty$, e da a expresión da sua primeira solución en serie de potencias.

[1.2] 5) Pon a ecuación diferencial

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}-ax\frac{dy(x)}{dx}+\lambda y(x)=0,\quad 0\le x\le 1,$$

con a un número real constante, na forma de Sturm-Liouville. ¿Qué condicións ten que verificar a constante a para que a ecuación resultante sexa realmente de Sturm-Liouville? Indica, sen resolver a ecuación, a propiedade de ortogonalidade que deben verificar as solucións á ecuación correspondentes a autovalores distintos.

[0.8] 6) Encuentra la función $u=u(x,y)$ que satisface la ecuación

$$e^{-y}\,u_x-1=u-u_y-2\,y\,u_x\,,\qquad u(x,0)=x\,.$$

[1.7] 7) Encuentra la solución $u=u(x,y,t)$ de la ecuación del calor

$$\pi^2\,u_t=u_{xx}+u_{yy}\,,\qquad 0<x<1\,,\quad 0<y<2\,,\quad t>0\,,$$

con las siguientes condiciones de frontera:

$$\begin{cases} u_x(0,y,t) = u_x(1,y,t) = 0\,, & 0<y<2\,,\quad t>0\,,\\ u(x,0,t) = u(x,2,t) = 0\,, & 0<x<1\,,\quad t>0\,,\end{cases}$$

y la condición inicial

$$u(x,y,0)=\operatorname{sen}^2(\pi x)\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{2}\right)\,,\qquad 0<x<1\,,\quad 0<y<2\,.$$