MÉTODOS MATEMÁTICOS IV, curso 2004/2005

EXAMEN FINAL *(1 de julio de 2005)*

♣ Cada pregunta debe responderse en hoja aparte. La puntuación máxima de cada pregunta (sobre 10) se indica entre corchetes.

♣ Hacer constar en cada hoja el nombre y DNI del alumno.

♣ Los alumnos que tienen que examinarse del segundo parcial deben contestar a las preguntas C1—C2 y D1–D2.

♣ Los alumnos que tienen que examinarse de los dos parciales deben elegir entre contestar a las preguntas A1–A2 ó B1–B2, y a las preguntas C1–C2 ó D1–D2.

---

[3] A1) Utilizando el método de las funciones de Green, encuentra la solución de la ecuación diferencial inhomogénea

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y(x) = f(x)$$

con condiciones de contorno $y(-\infty) = y(+\infty) = 0$.

[7] A2) Sea $V \subset R^3$ la región sólida limitada por el hiperboloide de una hoja $x^2+z^2 = 1+y^2$ y los planos $y = -1$, $y = +1$, y $z = 0$, con $z \geq 0$.

i) Dibujar V y orientar su frontera para que se cumpla el teorema de Gauss.

ii) Comprobar que se cumple el teorema de Gauss en V para el campo

$$\vec{F} = x\,\vec{e}_1 + g(x,y)\,\vec{e}_3\,,$$

donde $g = g(x,y)$ es una función arbitraria de clase ≥ 1.

---

[4] B1) Sea $\vec{x} = \vec{x}(\theta)$ una representación paramétrica regular de una curva Γ. ¿Cómo se define la curvatura de Γ?

Dibujar la curva correspondiente a $\vec{x} = \theta\,\vec{e}_1 + \operatorname{sen}\theta\,\vec{e}_2$, con $\theta \in R$, calcular su curvatura, y determinar los puntos donde alcanza los valores máximo y mínimo.

[6] B2) Considérese el problema de Sturm-Liouville en el intervalo [0,e] dado por:

$$\frac{d}{dx}\Big(x^2\,\frac{dy}{dx}\Big) = -\lambda\,y(x)$$

con condiciones de contorno $y(1) = 0$, $y(e) = 0$.

i) Encuentra los autovalores y las correspondientes autofunciones.

ii) Verifica, calculándolo explícitamente, que las autofunciones son ortogonales.

iii) Dibuja las 3 primeras autofunciones (valores $n = 1, 2, 3$) y especifica las posiciones de sus ceros en el intervalo que estamos estudiando.

NOTA: $x^{ia} = \exp(ia \ \ln x)$

[3, 5] C1) Tomando $u(x,t) = v(x,t)\ e^{ax+bt}$ y eligiendo a y b para que la ecuación transformada sea la de ondas, hallar la solución al problema de Cauchy:

$$u_{tt} - u_{xx} - k(u_t + u_x) = 0 \ , \qquad -\infty < x < \infty \ , \quad t > 0 \ ,$$

con las condiciones iniciales $u(x,0) = h_0(x)$ y $u_t(x,0) = h_1(x)$.

[6, 5] C2) Para a ecuación diferencial

$$3x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\,\frac{dy}{dx} + x^2 y = 0, \quad x > 0 \ :$$

i) Atopa os puntos singulares regulares [10 % da pregunta].

ii) Da a relación de recurrencia entre os coeficientes das series que son solución da ecuación en torno ao punto regular singular [60 % da pregunta].

iii) Indica os catro primeiros termos de cada unha das series solución. Son linealmente independentes? [20 % da pregunta].

iv) Cal e o radio de converxencia das solucións? [10 % da pregunta]

[3, 5] D1) Empregando a fórmula de Rodrigues para os polinomios de Legendre,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(x^2 - 1\right)^n ,$$

e a propiedade de ortogonalidade destes polinomios,

$$\int_{-1}^{1} dx\, P_n(x) P_m(x) = \frac{2\delta_{nm}}{2n+1} ,$$

escrebe a expansión en serie de Legendre da función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -1 \le x \le 0, \\ x & \text{se} \quad 0 < x \le 1, \end{cases}$$

[50 % da pregunta] e calcula os catro primeiros coeficientes da serie [50 % da pregunta].

[6, 5] D2) Resolver el problema de Dirichlet en una región angular

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \ , \qquad 1 \le r \le 2 \ , \quad -\pi \le \theta \le \pi \ ,$$

con las condiciones de frontera

$$u(1,\theta) = \text{sen } 4\theta - \cos\theta \ , \qquad u(2,\theta) = \text{sen } \theta \ .$$
