MÉTODOS MATEMÁTICOS IV, curso 2005/2006

CONVOCATORIA DE JUNIO–EXAMEN FINAL *(26 de junio de 2006)*

♣ Cada pregunta debe responderse en hoja aparte. La puntuación máxima de cada pregunta (sobre **40** puntos) se indica entre corchetes.

♣ Hacer constar en cada hoja el nombre y DNI del alumno.

♣ Los alumnos que quieran examinarse sólo del segundo parcial deberán contestar a las preguntas B1—B4 solamente. Tiempo: **2 horas y media**.

♣ Los alumnos que tienen que examinarse de los dos parciales deberán contestar a todas las preguntas A1–A4 y B1–B4. Tiempo: **4 horas**.

---

[4] A1) Construir una representación paramétrica en la que no intervengan radicales para la intersección del cilindro $(2y-1)^2+4z^2=1$ con la esfera de radio 1 centrada en el origen. Utilizarla para estudiar si la curva es cerrada.

[8] A2) Sea $S=S_1\cup S_2$ la superficie correspondiente a la unión del tronco de cono cuádrico

$$S_1=\left\{(x,y,z)\mid 4x^2+y^2=(z+1)^2,\quad 0\le z\le H\right\}$$

con la elipse

$$S_2=\left\{(x,y,H)\mid 4x^2+y^2\le (H+1)^2\right\}.$$

a) Dibujar S indicando una de las dos orientaciones posibles.

b) Calcular la integral de superficie $\int\int_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$ para el campo vectorial $\vec{F}=y^4\vec{e}_3$.

c) Justificar la dependencia en H de la integral calculada en el apartado anterior utilizando el teorema de Gauss y/o el teorema de Stokes.

[2.5] A3) ¿Bajo qué condiciones del parámetro α el problema de Sturm-Liouville

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda\, y(x)=0\ ,\quad \alpha y(0)+y'(0)=y'(1)=0$$

definido en el intervalo [0,1] tiene autovalores negativos?

[5.5] A4) Considérese el problema de contorno no homogéneo dado por la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+(k\ \pi)^2\ y=f(x)$$

con condiciones de contorno $y(0)=1$, $y(1)=0$ y donde $k=\frac{1}{2}$.

i) [40%] Encuentra la función de Green asociada a este problema no homogéneo.

ii) [60%] Utilizando la función de Green, encuentra la solución $y(x)$ de la ecuación diferencial no homogénea cuando $f(x)=x\ sen(\frac{\pi x}{2})$.

[3.5] B1) Para a ecuación de Bessel

$$x^2y(x) + xy(x) + [x^2 - p^2]y(x) = 0\,,$$

con p un número real, indica e resolve a ecuación indicial [40%], e indica para qué valores dos índices solución da ecuación indicial se poden atopar unha ou duas solucións en serie de Frobenius [40%]. Cal é a solución que se adopta no caso en que non haxa duas solucións en serie de Frobenius [20%]?

[6.5] B2) Atopa a relación de recurrencia [40%], os tres primeiros termos [40%] e o radio de converxencia [20%] de cada unha das duas series que constitúen as solucións linealmente independentes da ecuación diferencial

$$e^x \frac{d^2y(x)}{dx^2} + xy(x) = 0\,, \quad x \geq 0\,.$$

[3.5] B3) Resolver la ecuación diferencial

$$u\,u_x + \frac{1}{2} y\,u_y - x = 0\ ,$$

sabiendo que la función $u(x, y)$ se anula sobre la parábola $x = y^2$.

[6.5] B4) Resolver la ecuación de Laplace en un cubo de lado π con condiciones de contorno mixtas:

$$\begin{aligned}
&u(x, y, 0) = 2\,\mathrm{sen}\,x\,\cos^2 y\ ,\\
&u(0, y, z) = u(\pi, y, z) = u(x, y, \pi) = 0\ ,\\
&u_y(x, 0, z) = u_y(x, \pi, z) = 0\ .
\end{aligned}$$

Usando la solución, mostrar que se cumple alguna de las propiedades conocidas de las funciones armónicas.