MÉTODOS MATEMÁTICOS IV, curso 2006/2007

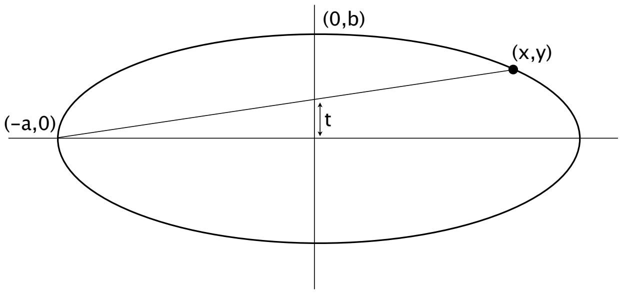
Convocatoria de junio *(11 de junio de 2007) – Corregido*

♣ Hacer constar en cada hoja el nombre y DNI del alumno.

♣ Cada pregunta debe responderse en hoja aparte. La puntuación máxima de cada pregunta se indica entre corchetes.

♣ Tiempo: **4 horas**.

[0.7] 1) Construir una representación paramétrica de la elipse de semiejes a y b utilizando como parámetro la longitud t indicada en la figura. Estudiar si la representación paramétrica obtenida es regular y si describe todos los puntos de la elipse.



[2.3] 2) a) Aplicar el teorema de Gauss a un campo vectorial $\vec{F} = \alpha x\vec{e}_1 + \beta x\vec{e}_2 + \gamma x\vec{e}_3$, donde α, β y γ son constantes, para expresar el volumen de una región sólida mediante una integral de superficie sobre su frontera.

b) Utilizar la expresión resultante para calcular el volumen de la región limitada por el toro $\vec{x}(\theta, \phi) = (a + b\cos\theta)(\cos\phi\vec{e}_1 + \operatorname{sen}\phi\vec{e}_2) + b\operatorname{sen}\theta\vec{e}_3$, donde $\theta \in (0, 2\pi]$, $\phi \in (0, 2\pi]$ y $a > b$.

[2.7] 3) Para a ecuación

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + 4\,y(x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 0, \quad \left.\frac{dy(x)}{dx}\right|_{x=1} = 2 :$$

a) Calcula a función de Green.
b) Obtén a solución cando $f(x) = 8x + 1$.

[1.2] 4) A ecuación de Hermite é

$$w''(x) + (2p + 1 - x^2)w(x) = 0.$$

O cambio $w(x) = e^{-x^2/2}y(x)$ conduce á ecuación

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2py(x) = 0.$$

a) Considerando a primeira ecuación como un problema de Sturm-Liouville con condicións de contorno $w(-\infty) = 0 = w(\infty)$, indica cales son os autovalores, as autofuncións e a correspondente propiedade de ortogonalidade.
b) Expresa a segunda ecuación como un problema de Sturm-Liouville (axuda: multiplica a ecuación por e^{-x^2}), indica os autovalores, as autofuncións e a correspondente propiedade de ortogonalidade.

[0.6] 5) Para a ecuación

$$x^2 y''(x) + 2\sin(x)\; y'(x) + y(x) = 0, \quad x > 0,$$

clasifica o punto $x = 0$, e cómo e cantas solucións se poden obter arredor deste punto.

[0.8] 6) La función $u(x, y)$ satisface la ecuación lineal de primer orden

$$x\, u_x + y\, u_y = 2\, x\, y\ ,$$

en $y > 0$, y la siguiente condición de frontera

$$u(x, y) = x^2 + 1\ , \qquad \text{en} \quad y = 1\ , \quad 0 < x < 1\ .$$

¿En qué región del plano (x, y) puede determinarse totalmente la función u?. Encuentra dicha solución.

[1.7] 7) Encuentra la solución acotada del siguiente problema de Poisson en el círculo de radio unidad,

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\ , \qquad r < 1\ , \quad 0 \le \theta < 2\pi\ ,$$

con la condición de frontera

$$u(1, \theta) = 1 + \theta + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\ .$$

Recuerda que el Laplaciano se escribe, en coordenadas polares,

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\ .$$