**MÉTODOS MATEMÁTICOS IV, curso 2007/2008**

**Convocatoria de junio** *(11 de junio de 2008)*

---

♣ Hacer constar en cada hoja el nombre y DNI del alumno.

♣ Cada pregunta debe responderse en hoja aparte. La puntuación máxima de cada pregunta se indica entre corchetes.

♣ Tiempo: **4 horas**.

---

[0.5] 1) Sea $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s)$ una curva regular con $\kappa(s) \neq 0\ \forall s$. Demostrar que su vector tangente forma un ángulo constante con un vector fijo $\vec{a}$ si, y sólo si, su curvatura y torsión satisfacen $\tau/\kappa = \text{const.}$

*[Algunas fórmulas:* $\dot{\vec{t}} = \kappa\,\vec{n},\ \ \dot{\vec{n}} = -\kappa\,\vec{t} + \tau\,\vec{b},\ \ \dot{\vec{b}} = -\tau\,\vec{n},\ \ \vec{t} \wedge \vec{n} = \vec{b},$

$\kappa = |\vec{x}\,' \wedge \vec{x}\,''|/|\vec{x}\,'|^3, \quad \tau = \vec{x}\,' \cdot [\vec{x}\,'' \wedge \vec{x}\,''']/[\vec{x}\,' \wedge \vec{x}\,'']^2.$ *]*

[1] 2) Proponer una parametrización para la superficie determinada por la condición (hiperboloide de una hoja)

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

y utilizarla para obtener un vector unitario normal a la superficie en cada punto, $\vec{n} = \vec{n}(x, y, z)$.

Si $z_0$ es una constante real, describir geométicamente la curva definida por $\vec{\alpha} = \vec{n}(x, y, z_0)$ y calcular su curvatura y torsión.

[2.25] 3) a) Calcular explícitamente (usando su definición) la integral de línea

$$\oint_R \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}\ ,$$

donde $R$ es la curva (orientada) que delimita el rectángulo con vértices $(-1, -2)$, $(-1, \pi)$, $(a, \pi)$ y $(a, -2)$, y $a \neq 0$.

b) Calcular la misma integral utilizando el teorema de Green.

*[Ayuda:* $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \frac{\pi}{2}$ *signo* $(x)$.*]*

[1.9] 4) Indica a relación de recurrencia e os tres primeiros termos non nulos de cada unha das dúas series de potencias arredor do 0, que definen as solucións linealmente independentes da ecuación diferencial

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1 - x^2\right)\frac{dy(x)}{dx}\right] + \left(\alpha + \beta x^2\right) y(x) = 0.$$

¿Cal é o radio de converxencia das solucións?

[0.7] 5) Cuestión 1: Para o par de ecuacións diferenciais

$$\begin{aligned} y''(x) + A^2 y(x) &= 0, \\ y''(x) + B^2 y(x) &= 0, \end{aligned}$$

con $A^2 > B^2 > 0$, verifica o segundo teorema de comparación de Sturm.

[1.15] 6) Cuestión 2: Da función xeneratriz dos polinomios de Laguerre,

$$g(x,z) = \frac{e^{-xz/(1-z)}}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\, z^n,$$

obtén a relación de recurrencia entre $L_{n+1}(x)$, $L_n(x)$ e $L_{n-1}(x)$.

[1] 7) Sea $\Gamma$ un círculo de radio unidad, $R = 1$, y $\partial\Gamma$ su frontera.

- Si $u$ satisface la ecuación de Laplace en el interior de $\Gamma$ y su valor en $\partial\Gamma$ es $u(\partial\Gamma) = 3\,\mathrm{sen}\,\theta + 1$, ¿cuál es el valor máximo de $u$ en $\Gamma$? ¿Cuánto vale $u$ en el centro de $\Gamma$?
- Encuentra la solución de $\nabla^2 v = 1$ en el interior de $\Gamma$, tal que $v(\partial\Gamma) = 0$.

[1.5] 8) Resuelve la ecuación

$$x^2\, u_{xx} - 2x\, u_{xy} + \frac{3}{4}\, u_{yy} + \frac{1}{2}\, u_y = 0 \ , \qquad x > 1 \ ,$$

sujeta a las condiciones de frontera $u(1,y) = 0$ y $u_x(1,y) = 1$.