MÉTODOS MATEMÁTICOS IV, curso 2008/2009

Convocatoria de junio *(11 de junio de 2009)*

♣ Hacer constar en cada hoja el nombre y DNI del alumno.

♣ Cada pregunta debe responderse en hoja aparte. La puntuación máxima de cada pregunta se indica entre corchetes.

♣ Tiempo: **4 horas**.

♢ Distribución: **3.3 + 4.2 + 2.5**.

[1.7] 1) Demostrar que la imagen de la curva $\mathcal{C}$ dada por $\theta(t) = 2\arctan t$, $\phi(t) = -\log t$ (mod 2π), $t > 0$, sobre la esfera de radio unidad,

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = \sin\theta\, \cos\phi\, \mathbf{e_1} + \sin\theta \sin\phi\, \mathbf{e_2} + \cos\theta\, \mathbf{e_3}\ ,$$

(donde, recordemos, $\theta \in (0, \pi)$ es el ángulo polar y $\phi \in [0, 2\pi)$ es el azimutal) corta los meridianos (curvas θ-paramétricas) en un ángulo constante.

(i) ¿Cuánto vale dicho ángulo?

(ii) Representar gráficamente la curva. ¿Cúal es su longitud total?

(iii) Demuestra que la curvatura es mayor o igual que uno a lo largo de toda la curva. (Opcional: ¿dónde crees que la curvatura es máxima/mínima?, ¿por qué?.) *[Es más sencillo probarlo en general, para cualquier curva regular en la esfera]*

[Recordar que $\frac{d}{dt}\arctan t = \frac{1}{t^2+1}$ *]*

[1.6] 2) Dibujar la superficie correspondiente al cono cuádrico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{(z-c)^2}{c^2} = 0\ , \qquad c > 0\ ,$$

con $x, y \geq 0$ y $0 \leq z \leq c$, y comprobar el teorema de Stokes para el campo vectorial $\mathbf{F} = -y^3\, \mathbf{e_1} + x\, \mathbf{e_2} + e^{-z}\, \mathbf{e_3}$.

[1.5] 3) Construir la función de Green del problema de contorno

$$y'' - 2y' + y = f(x)\ , \qquad y(0) = y(1) = 0\ .$$

[1.7] 4) a) Obtener la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' - 2xy' = 0$$

usando el método de las series de potencias. b) Comprobar el resultado integrando la ecuación directamente.

[1] 5) Utilizando la fórmula de Rodrigues y las relaciones de ortogonalidad de los polinomios de Hermite,

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \,, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) = 2^n n! \sqrt{\pi}\, \delta_{m,n} \,,$$

calcular los coeficientes del desarrollo en serie $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n H_n(x)$.

[Recordar que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$].

[1.0] 6) Comprobar que mediante el cambio de variables $\eta = x + ct$, $\nu = x - ct$, la ecuación de ondas

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0$$

toma la forma canónica $u_{\eta\nu} = 0$. Obtener la solución de esta ecuación para la recta real, $-\infty < x < \infty$, con condiciones iniciales $u(x,0) = \exp(-x^2)$, $u_t(x,0) = 0$.

[1.5] 7) Encontrar, mediante el método de separación de variables, la solución $u(x,y)$ correspondiente a la temperatura de una placa rectángular de dimensiones $0 < x < a$, $0 < y < b$, que obedece la ecuación de Laplace:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

con condiciones de contorno:

$$u_x(0,y) = 0, \qquad u_x(a,y) = 0, \qquad 0 < y < b$$

$$u(x,0) = 0, \qquad u(x,b) = \cos(\frac{3\pi}{a} x), \qquad 0 < x < a$$