MÉTODOS MATEMÁTICOS IV, curso 2009/2010

Convocatoria de junio *(8 de junio de 2010)*

♣ Hacer constar en cada hoja el nombre y DNI del alumno.

♣ Cada pregunta debe responderse en hoja aparte. La puntuación máxima de cada pregunta se indica entre corchetes.

♣ Tiempo: **4 horas**.

[1.65] 1) Demostrar que la imagen de la curva dada por $\theta(t) = 2\arctan t$, $\phi(t) = \log t$, $t > 0$, sobre la esfera de radio unidad,

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = \sin\theta\,\cos\phi\,\mathbf{e_1} + \sin\theta\sin\phi\,\mathbf{e_2} + \cos\theta\,\mathbf{e_3}\ ,$$

donde θ es el ángulo polar y ϕ el azimutal, $\theta \in [0, \pi]$ y $\phi \in [0, 2\pi)$, corta los meridianos en un ángulo constante. ¿Cuánto vale dicho ángulo? ¿Cúal es la longitud total de la curva? Demuestra que la curvatura es mayor o igual que uno en cualquier punto de la curva.

[Recordar que $\frac{d}{dt}\arctan t = \frac{1}{t^2+1}$*].*

[1.65] 2) Sexa a rexión sólida limitada polo hiperboloide dunha folla $x^2 + y^2 = 1 + z^2$ e os planos $z = -1$, $z = +1$ e $y = 0$, con $y \leq 0$.

i) Debuxar a rexión e orientala para que verifique o teorema de Gauss.

ii) Calcular o fluxo do campo vectorial

$$\vec{F} = x\,\vec{e}_1 + x^3\,\vec{e}_2$$

sobre a superficie que limita a rexión sólida, tanto por integración directa como usando o teorema de Gauss.

[1.4] 3) Sexa a ecuación diferencial

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} - 2\frac{dy(x)}{dx} + \lambda y(x) = 0$$

con condicións de contorno $y(0) = 0 = \left.\frac{dy(x)}{dx}\right|_{x=1}$, $0 \leq x \leq 1$.

i) Escribir a forma correspondente de Sturm-Liouville.

ii) Calcular os autovalores e autofuncións.

iii) Comprobar a ortogonalidade das autofuncións.

[1.4] 4) Para la ecuación diferencial

$$x^2 y'' = 5\,(e^x - 1)\left(y' - \frac{9}{5x}\,y\right)\ , \qquad x > 0\ ,$$

obtén la relación de recurrencia y los tres primeros términos no nulos de la solución $y(x)$ en serie de Frobenius alrededor del punto $x_0 = 0$.

[1.4] 5) Usando la función generatriz de los polinomios de Legendre,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} = P_0(x) + P_1(x)\,z + P_2(x)\,z^2 + \ldots + P_p(x)\,z^p + \ldots$$

muestra:

- cómo escribir $P_p(x)$ en términos:
  (i) de los polinomios $P_{p\pm1}(x)$;
  (ii) de su derivada y las de $P_{p\pm1}(x)$;
- que los polinomios $P_p(x)$ satisfacen la ecuación de Legendre;
- los valores de $P_{2p+1}(0)$, $P_{2p}(0)$, $P_p(1)$ y $P_p(-1)$.

[1] 6) Comprobar que mediante el cambio de variables $\eta = x + ct$, $\nu = x - ct$, la ecuación de ondas

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0$$

toma la forma canónica $u_{\eta\nu} = 0$. Obtener la solución de esta ecuación para la recta real, $-\infty < x < \infty$, con condiciones iniciales $u(x, 0) = \exp\left(-x^2\right)$, $u_t(x, 0) = 0$.

[1.5] 7) Calcular la forma de una pompa de jabón que se apoya sobre un rectángulo con lados de longitud 1 y 2. El rectángulo es plano salvo uno de los lados cortos, que se ha ondulado con forma $f(x) = 2\ \cos\pi x\ \operatorname{sen}\pi x$. Esto es, mediante el método de separación de variables resolver la ecuación de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

donde $0 < x < 1\ , \quad 0 < y < 2$, con condiciones de contorno

$$u(x, 0) = 0\ , \qquad u(x, 2) = 2\ \cos\pi x\ \operatorname{sen}\pi x\ , \qquad u(0, y) = u(1, y) = 0\ .$$

NOTA:
$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cos(a)$,
$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$.