MÉTODOS MATEMÁTICOS IV, curso 2010/2011

Convocatoria de septiembre II *(27 de octubre de 2011)*

♣ Hacer constar en cada hoja el nombre y DNI del alumno.

♣ Cada pregunta debe responderse en hoja aparte. La puntuación máxima de cada pregunta se indica entre corchetes.

♣ Tiempo: **4 horas**.

[1.6] 1) Demuestra que la imagen de la curva dada por $\theta(t) = 2\arctan t$, $\phi(t) = \log t$, $t > 0$, sobre la esfera de radio unidad,

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = \sin\theta\,\cos\phi\,\mathbf{e_1} + \sin\theta\sin\phi\,\mathbf{e_2} + \cos\theta\,\mathbf{e_3}\ ,$$

donde θ es el ángulo polar y ϕ el azimutal, $\theta \in [0, \pi]$ y $\phi \in [0, 2\pi)$, corta los meridianos en un ángulo constante. ¿Cuánto vale dicho ángulo? ¿Cúal es la longitud total de la curva? Demuestra que la curvatura es mayor o igual que uno en cualquier punto de la curva.

[Recordar que $\frac{d}{dt}\arctan t = \frac{1}{t^2+1}$*].*

[1.6] 2) Calcular o fluxo do campo vectorial $\vec{F} = (x^3, y^3, z^3)$ sobre a superficie $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leq z \leq h$, tanto facendo a integral de superficie como mediante o teorema de Gauss.

[1.5] 3) Sexa a ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} = f(x),$$

con condiciones de contorno $y(0) = 1 = y(1)$.

i) Acadar a función de Green.

ii) Calcular a solución para $f(x) = x$.

[1.6] 4) Obtener la solución general de la ecuación diferencial

$$3xy'' + 2y' + y = 0$$

mediante el método de Frobenius, y calcular el radio de convergencia de las series funcionales resultantes.

[Nota: No es necesario deducir la forma explícita de los coeficientes de las series. Es suficiente obtener las relaciones de recurrencia que satisfacen.]

[1.2] 5) A partir de la funcional generatriz

$$e^{\frac{1}{2}x\left(z-\frac{1}{z}\right)} = \sum_{n\in\boldsymbol{Z}} z^n \, J_n(x),$$

obtener la expresión de las funciones de Bessel $J_n(x)$ como series de potencias. Comprobar que las expresiones resultantes cumplen la ecuación

$$x^2 J_n'' + xJ_n' + (x^2 - n^2)J_n = 0,$$

y deducir la relación existente entre $J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$.

[Sugerencia: Desarrollar en serie las exponenciales $e^{\frac{1}{2}xz}$ y $e^{-\frac{1}{2}\frac{x}{z}}$, y distinguir claramente los casos $n \geq 0$ y $n < 0$.]

[1.0] 6) Comprobar que mediante el cambio de variables $\eta = x + ct$, $\nu = x - ct$, la ecuación de ondas

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2}u_{tt} = 0$$

toma la forma canónica $u_{\eta\nu} = 0$. Obtener la solución de esta ecuación para la recta real, $-\infty < x < \infty$, con condiciones iniciales $u(x,0) = \exp\left(-x^2\right)$, $u_t(x,0) = 0$.

[1.5] 7) Calcular la forma de una pompa de jabón que se apoya sobre un rectángulo con lados de longitud 1 y 2. El rectángulo es plano salvo uno de los lados cortos, que se ha ondulado con forma $f(x) = 2\,\cos\pi x\,\mathrm{sen}\pi x$. Esto es, mediante el método de separación de variables resolver la ecuación de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

donde $0 < x < 1$, $\quad 0 < y < 2$, con condiciones de contorno

$$u(x,0) = 0 \ , \qquad u(x,2) = 2\,\cos\pi x\,\mathrm{sen}\pi x \ , \qquad u(0,y) = u(1,y) = 0 \ .$$

NOTA:
$\mathrm{sen}(a+b) = \mathrm{sen}(a)\cos(b) + \mathrm{sen}(b)\cos(a)$,
$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \mathrm{sen}(a)\mathrm{sen}(b)$.