MÉTODOS MATEMÁTICOS IV, curso 2004/2005

Convocatoria de septiembre *(09-09-05)*

♣ Hacer constar en cada hoja el nombre y DNI del alumno.

♣ Cada bloque de dos preguntas, A1–A2, B1–B2, C1–C2 y D1–D2 debe responderse en hoja aparte.

♣ La puntuación máxima de cada pregunta (**sobre 40**) se indica entre corchetes. Para aprobar hay que conseguir 20 puntos.

---

[3] A1) i) Definir los coeficientes de la primera forma fundamental de una superficie definida por una representación paramétrica $\vec{x} = \vec{x}(u, v)$.

ii) Calcularlos para

$$\vec{x} = \frac{u+v}{2}\,\vec{e}_1 + \frac{u+v}{2}\,\vec{e}_2 + uv\,\vec{e}_3\ ,$$

y escribir el elemento diferencial de área.

[9] A2) i) Dibujar la superficie correspondiente al cono

$$x^2 + z^2 = (y-a)^2$$

con $x, z \geq 0$ e $0 \leq y < a$, orientada de acuerdo con los requisitos del teorema de Stokes.

ii) Comprobar que se cumple el teorema de Stokes en dicha superficie para el campo vectorial

$$\vec{F} = -y^3\,\vec{e}_1 + x\,\vec{e}_2 + \mathrm{e}^{-z}\,\vec{e}_3\ .$$

[2.5] B1) Considérese el problema de Sturm-Liouville en el intervalo [0,1]

$$\frac{d}{dx}\Big(\mathrm{e}^{2x}\,\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\Big) + \lambda\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{y(x)} = 0$$

con condiciones de contorno $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.

Determinar los autovalores y sus correspondientes autofunciones.

[5.5] B2) i) Encuentra, utilizando funciones de Green, la solución del problema inhomogéneo de contorno:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{l(l+1)}{x^2}y(x) = \mathrm{e}^{-x}$$

con condiciones de contorno $y(0) = 0$ e $y'(\infty) = 0$.

NOTA: En este caso dejar indicada la solución.

ii) ¿Sería posible encontrar una solución si la ecuación fuese

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{l(l+1)}{x^2} y(x) = x \ ?$$

¿Por qué?

---

[4] C1) Para a ecuación diferencial

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{3}{4} y = 0, \quad x \geq 0 \,,$$

indica, xustificando a resposta, que método se empregaría para atopar solucións en serie arredor de $x_0 = 0$, e cantas solucións linealmente independentes tes garantizado que se poden atopar por este método. [A ecuación indicial é $r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$.]

[6] C2) Para os polinomios de Hermite, usa a formula de Rodrigues

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2}$$

para atopar unha relación de recurrencia entre $H_n'(x)$, $H_n(x)$ e $H_{n+1}(x)$ [35 % da pregunta], e a función xeneratriz

$$e^{2xz - z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} \, z^n$$

para expresar $H_n'(x)$ en función de $H_{n-1}(x)$ [50 % da pregunta]. Emprega estas fórmulas para atopar os polinomios con $n = 1, 2, 3, 4$ [15 % da pregunta].

---

[2] D1) ¿Qué es una función armónica? Da un ejemplo e indica alguna de sus propiedades.

[8] D2) Encuentra la solución $u(x, y, t)$ de la ecuación del calor

$$u_t = \beta \left(u_{xx} + u_{yy} \right) \ , \quad 0 < x < L_x \ , \quad 0 < y < L_y \ , \quad t > 0 \ ,$$

con las siguientes condiciones de frontera:

$$u_x(0, y, t) = u_x(L_x, y, t) = 0 \ , \quad 0 < y < L_y \ , \quad t > 0 \ ,$$

$$u(x, 0, t) = u(x, L_y, t) = 0 \ , \quad 0 < x < L_x \ , \quad t > 0 \ ,$$

y la condición inicial

$$u(x, y, 0) = \mathrm{sen}^2 \left(\frac{\pi x}{L_x} \right) \mathrm{sen} \left(\frac{\pi y}{L_y} \right) \ , \quad 0 < x < L_x \ , \quad 0 < y < L_y \ .$$