MÉTODOS MATEMÁTICOS IV, curso 2005/2006

CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE *(12 de septiembre de 2006)*

♣ Cada pregunta debe responderse en hoja aparte. La puntuación máxima de cada pregunta sobre 10 se indica entre corchetes.

♣ Hacer constar en cada hoja el nombre y DNI del alumno.

---

[1] 1) Sea una curva determinada por la representación natural $\vec{x} = \vec{x}(s)$, y sea $\vec{b} = \vec{b}(s)$ su vector binormal unitario. La curva determinada por la representación paramétrica $\vec{\alpha} = \vec{b}(s)$ recibe el nombre de indicatriz esférica de la binormal unitaria. Calcular su curvatura como función de la curvatura y la torsión de la curva orginal.

$$Ayuda: \quad \dot{\vec{t}} = \kappa\,\vec{n}\,, \qquad \dot{\vec{n}} = -\kappa\,\vec{t} + \tau\,\vec{b}\,, \qquad \dot{\vec{b}} = -\tau\,\vec{n}\,, \qquad \vec{t}\wedge\vec{n} = \vec{b}$$

$$\kappa = \frac{|\vec{x}\,' \wedge \vec{x}\,''|}{|\vec{x}\,'|^3}\,, \qquad \tau = \frac{\vec{x}\,' \cdot [\vec{x}\,'' \wedge \vec{x}\,''']}{[\vec{x}\,' \wedge \vec{x}\,'']^2}\,.$$

[2] 2) Sea $S = S_1 \cup S_2$ la superficie correspondiente a la unión del círculo

$$S_1 = \Big\{(x, y, H) \mid x^2 + y^2 \leq (H+1)^2\Big\}$$

con el tronco de cono

$$S_2 = \Big\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = (z+1)^2, \quad 0 \leq z \leq H\Big\}.$$

a) Dibujar S indicando una de las dos orientaciones posibles.

b) Calcular la integral de superficie $\int\int_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$ para el campo vectorial $\vec{F} = x^2 y^2 \vec{e}_3$.

c) Justificar la dependencia en H de la integral calculada en el apartado anterior utilizando el teorema de Gauss y/o el teorema de Stokes.

[0.7] 3) Encuentra, utilizando funciones de Green, la solución del problema inhomogéneo de contorno

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y(x) = f(x)$$

con condiciones de contorno $y(-\infty) = 0$ e $y(\infty) = 0$.

[1.3] 4) Considérese el problema de Sturm-Liouville en el intervalo [0,e] dado por:

$$\frac{d}{dx}\Big(x^2\,\frac{dy}{dx}\Big) = -\lambda\; y(x)$$

con condiciones de contorno $y(1) = 0$, $y(e) = 0$.

i) Encuentra los autovalores y las correspondientes autofunciones.

ii) Verifica, calculándolo explicitamente, que las autofunciones son ortogonales.

NOTA: $x^{ia} = \exp(ia\ \ln x) = \cos(a\ln x) + i\mathrm{sen}(a\ln x)$

[0.8] 5) Sexa a ecuación hiperxeométrica

$$s(1-s)\frac{d^2y(s)}{ds^2}+[c-(a+b+1)s]\frac{dy(s)}{ds}-aby(s)=0\,,$$

con a, b, c constantes. A sua primeira solución é a función hiperxeométrica

$$F(a,b,c;s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}\,s^n\,,\quad (t)_n=t(t+1)(t+2)\ldots(t+n-1)\,.$$

Usando o cambio de variable $x = bs$ obtén a ecuación hiperxeométrica confluente [60 %]

$$x\frac{d^2y(x)}{dx^2}+[c-x]\frac{dy(x)}{dx}-ay(x)=0$$

mediante o límite $b\to\infty$, e da a expresión da sua primeira solución en serie de potencias [40 %].

[1.7] 6) Para a ecuación diferencial

$$3x\frac{d^2y(x)}{dx^2}+\frac{dy(x)}{dx}+6x\ln(1+x)\,y(x)=0,\quad x\geq 0\ :$$

a) Da a relación de recurrencia entre os coeficientes das series que son solución da ecuación en torno ao punto regular singular $x_0 = 0$. [60 %]

b) Indica os tres primeiros termos non nulos de cada unha das series solución. Son linealmente independentes? [40 %]

Recorda que

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n/n\,.$$

[0.8] 7) Hallar la función $u(x, y)$, sujeta a $u(x, 0) = x$, que satisface

$$\left(2\,y+e^{-y}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=u+1\ .$$

[1.7] 8) Encontrar una función armónica $u(r, \theta)$, acotada, en la región semicircular

$$D_a\equiv\{r\leq a,\ 0\leq\theta\leq\pi\}\ ,$$

que se anule en $\theta = 0$ y tome el valor constante U_0 en $\theta = \pi$ y sobre la semicircunferencia $r = a$.

Recordar que el Laplaciano en coordenadas polares se escribe:

$$\nabla^2u=\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\ .$$