MÉTODOS MATEMÁTICOS IV, curso 2006/2007

Convocatoria de septiembre (11-09-07)

- ♣ Hacer constar en cada hoja el nombre y DNI del alumno.
- ♣ Cada pregunta debe responderse en hoja aparte. La puntuación máxima de cada pregunta se indica entre corchetes.
- ♣ Tiempo: **4 horas**.

[1.0] 1) Calcular el triedro móvil de la curva $\vec{x} = (3t - t^3)\vec{e}_1 + 3t^2 e_2 + (3t + t^3)\vec{e}_3$.

[Algunas fórmulas: $\dot{\vec{t}} = \kappa\,\vec{n}$, $\dot{\vec{n}} = -\kappa\,\vec{t} + \tau\,\vec{b}$, $\dot{\vec{b}} = -\tau\,\vec{n}$, $\vec{t} \wedge \vec{n} = \vec{b}$.*]*

[2.0] 2) Sea S la superficie (abierta) correspondiente al hiperboloide $(z-a)^2 - x^2 - y^2 = b^2$ con $0 \le z \le a - b$, donde $a > b > 0$. Dibujar la superficie y calcular la integral de superficie (flujo) $\int_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$ para el campo $\vec{F} = xz\vec{e}_1 + (\mathrm{sen}\,(xz) - ay)\vec{e}_2$. *[Sugerencia: utilizar el teorema de Gauss]*.

[2.5] 3) Usando o método das series de Frobenius, obtén a solución ou solucións da ecuación diferencial

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy(x)}{dx} + e^{-x}y(x) = 0, \quad x > 0,$$

arredor do punto $x_0 = 0$ ate o terceiro termo non nulo da serie. Cantas solucións se poden obter por este método?

[0.8] 4) Usando a función xeneratriz das funcións de Bessel,

$$e^{x(z-1/z)/2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n\,,$$

atopa a relación entre a primeira derivada da función de Bessel de orde n e as funcións de Bessel de orde $n+1$ e $n-1$. Simplifica a expresión resultante no caso $n = 0$.

[1.2] 5) Sexa o problema de contorno

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} - \frac{dy(x)}{dx} + \lambda y(x) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \quad y(0) = y(1) = 0,$$

con $\lambda > 1/4$ un número real. Multiplicando por e^{-x}, transforma esta ecuación á forma de Sturm-Liouville, e atopa os correspondentes autovalores e autofuncións. Existe solución non trivial para $\lambda = 1/4$?

[1.0] 6) Resuelve la ecuación diferencial en derivadas parciales,

$$x^2\, u_x + y^2\, u_y = (x+y)\, u \ , \qquad x > 0 \ , \quad y > 0 \ ,$$

de manera que $u(1, y) = y^2$.

[1.5] 7) La *ecuación de la viga*,

$$u_{tt} + u_{xxxx} + \delta\, u_t + \gamma\, u = 0 \ , \qquad 0 < x < L \ ,$$

describe el movimiento vertical de una viga de largo L. Si los extremos se fijan mediante bisagras, las siguientes condiciones de frontera aparecen:

$$u(0,t) = u(L,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xx}(L,t) = 0 \ ,$$

donde δ y γ son constantes positivas, y δ es muy pequeña. Usa el método de separación de variables para encontrar el movimiento de una viga de largo $L = \pi$, sujeta a las condiciones iniciales:

$$u(x,0) = 2\,\mathrm{sen}\, x \ , \qquad u_t(x,0) = 0 \ .$$

(Ayuda: no hace falta chequear los tres casos $\lambda > 0$, $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ separadamente: sólo uno de ellos da una solución no trivial; considera directamente ese caso.)