# MÉTODOS MATEMÁTICOS IV, curso 2007/2008

**Convocatoria de septiembre** *(9 de septiembre de 2008)*

---

♣ Hacer constar en cada hoja el nombre y DNI del alumno.

♣ Cada pregunta debe responderse en hoja aparte. La puntuación máxima de cada pregunta se indica entre corchetes.

♣ Tiempo: **4 horas**.

---

[1.25] 1) Construir una representación paramétrica en la que no intervengan radicales para la intersección del cilindro $(2x-1)^2 + 4y^2 = 1$ con la esfera de radio 1 centrada en el origen. Utilizarla para estudiar si la curva resultante es cerrada.

[2.5] 2) Sea $S$ la superficie (abierta) correspondiente al hiperboloide $(z-a)^2 - x^2 - y^2 = b^2$ con $0 \le z \le a-b$, donde $a > b > 0$.

2.a) Dibujar la superficie y fijar una orientación.

2.b) Calcular la integral de superficie (flujo)

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

para el campo vectorial $\vec{F} = xz\,\vec{e}_1 + \big(\operatorname{senh}(\cos xz) - ay\big)\,\vec{e}_2 + y^2\,\vec{e}_3$.
*[Sugerencia: utilizar el teorema de Gauss.]*

[1.75] 3) Para a ecuación diferencial

$$x^2 \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + (e^x - 1)\left(-5\frac{dy(x)}{dx} + \frac{9}{x}\,y(x)\right) = 0, \quad x > 0,$$

obtén a relación de recurrencia e os tres primeiros termos non nulos da solución en serie de Frobenius arredor do punto $x_0 = 0$.

[1.2] 4) Resolve a ecuación diferencial

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = 2, \quad 0 \le x \le 1,$$

con condicións de contorno $y(0) = 0$, $dy/dx|_{x=1} = 1$.

[0.8] 5) Sexa un problema de Sturm–Liouville:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy(x)}{dx}\right] + \left[r(x) + \lambda q(x)\right] y(x) = 0, \quad a \le x \le b,$$

con $p$, $q$, $r$, $dy/dx$ funcións reais de variable real, continuas e $p, q > 0$ en $[a, b]$, e $\lambda$ unha constante, con condicións de contorno

$$A_1 y(a) + A_2 \left.\frac{dy(x)}{dx}\right|_{x=a} = 0, \quad B_1 y(b) + B_2 \left.\frac{dy(x)}{dx}\right|_{x=b} = 0,$$

onde alomenos algunha das constantes reais $A_1, A_2, B_1, B_2$ é non nula. Amosa que os autovalores deste problema son números reais.

[1.2] 6) Considera la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$y\, u_x - u_y = x\, u \ .$$

1. Encuentra $u(x, y)$, sabiendo que la función, en el eje $x$, vale $x^3$.
2. Escribiendo $u = f\, e^{\Phi}$, donde $y\, f_x - f_y = 0$, encuentra la solución general de la ecuación anterior.
3. Muestra que si las condiciones de frontera están sobre la curva $x = -y^2/2$, el problema está mal definido.

[1.3] 7) Considera la ecuación del calor en una placa rectangular de largos $\pi$ y $3\pi$,

$$u_t = u_{xx} + u_{zz} \ , \qquad x \in (0, \pi) \ , \quad z \in (0, 3\pi) \ ,$$

en la que dos de sus lados están térmicamente aislados,

$$u_z(x, 0, t) = u_z(x, 3\pi, t) = 0 \ ,$$

mientras que los otros dos se someten a un baño térmico,

$$u(0, z, t) = u(\pi, z, t) = 0 \ .$$

Si la distribución inicial de temperaturas está dada por

$$u(x, z, 0) = 2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2(z/3) \ ,$$

determina la temperatura en todos los puntos de la placa, en cualquier instante.