MÉTODOS MATEMÁTICOS IV, curso 2008/2009

Convocatoria de septiembre *(9 de septiembre de 2009)*

♣ Hacer constar en cada hoja el nombre y DNI del alumno.

♣ Cada pregunta debe responderse en hoja aparte. La puntuación máxima de cada pregunta se indica entre corchetes.

♣ Tiempo: **4 horas**.

[1.7] 1) Sea la curva que surge de la intersección del cono $z^2 = (x-1)^2 + y^2$ y el cilindro parabólico $z^2 = 1 - x$.

a) Demuestra que esta curva es la misma que resulta de la intersección de una esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ y un cilindro $x^2+y^2 = x$. (Se la conoce como *bóveda de Viviani* y fue obtenida por el florentino Vincenzo Viviani, discípulo de Galileo, en 1692.)

b) Representa gráficamente la curva. *[Sugerencia: utilizar la información del apartado anterior.]*

c) Encuentra una parametrización regular de la curva y calcula la curvatura. ¿En qué puntos es máxima? *[Sugerencia: no llevar la curva a su parametrización natural.]*

[1.6] 2) Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ la región sólida limitada por el hiperboloide de una hoja $x^2+z^2 = 1+y^2$ y los planos $y=-1$, $y=1$ y $z=0$, con $z \geq 0$.

a) Dibujar U y orientar su frontera para que cumpla el teorema de Gauss.

b) Comprobar que se cumple el teorema de Gauss en U para el campo vectorial

$$\vec{F} = x\, \mathbf{e_1} + f(x,z)\, \mathbf{e_2} + g(x,y)\, \mathbf{e_3}\ ,$$

donde $f(x,z)$ y $g(x,y)$ son funciones arbitrarias de clase $\mathcal{C}^{k\geq 1}(U)$.

[1.5] 3) Obtener los autovalores y las autofunciones del problema de Sturm-Liouville

$$x^2y'' + xy' - \lambda y = 0, \qquad y'(1) = y(e) = 0,$$

y comprobar que la autofunciones cumplen la propiedad de ortogonalidad.

[1.5] 4) Obtener la solución general de la ecuación diferencial

$$3xy'' + 2y' + y = 0$$

mediante el método de Frobenius, y calcular el radio de convergencia de las series funcionales resultantes.

[Nota: No es necesario deducir la forma explícita de los coeficientes de las series. Es suficiente obtener las relaciones de recurrencia que satisfacen.]

[1.2] 5) A partir de la funcional generatriz

$$e^{\frac{1}{2}x\left(z-\frac{1}{z}\right)} = \sum_{n\in\boldsymbol{Z}} z^n\, J_n(x),$$

obtener la expresión de las funciones de Bessel $J_n(x)$ como series de potencias. Comprobar que las expresiones resultantes cumplen la ecuación

$$x^2 J_n'' + x J_n' + (x^2 - n^2) J_n = 0,$$

y deducir la relación existente entre $J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$.

[Sugerencia: Desarrollar en serie las exponenciales $e^{\frac{1}{2}xz}$ y $e^{-\frac{1}{2}\frac{x}{z}}$, y distinguir claramente los casos $n \geq 0$ y $n < 0$.]

[1] 6) Considérese la ecuación diferencial en derivadas parciales:

$$u_{xx} + 3u_{tt} - 4u_{xt} = 0$$

donde $-\infty < x < \infty$, $\quad t > 0$.

a) De que tipo (parabólica, hiperbólica o elíptica) es la ecuación?

b) Mediante el cambio de variable $\alpha = 3x + t$, $\beta = x + t$, expresa dicha ecuación en su forma canónica.

c) Encuentra la solución de esta ecuación para las condiciones iniciales:

$$u(x,0) = x\ , \quad u_t(x,0) = 0\ .$$

[1.5] 7) Utilizando el método de separación de variables, resuelve la ecuación de Laplace

$$\nabla^2\, u(r,\theta) = 0$$

en un cuarto de disco de radio unidad, esto es, donde $\quad 0 \leq r \leq 1$, $\quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, y con las condiciones de frontera

$$u(0,\theta)\ \text{no divergente}\ , \qquad u(1,\theta) = \operatorname{sen} 6\theta\ , \qquad u(r,0) = 0\ , \quad u(r,\frac{\pi}{2}) = 0\ .$$

NOTA: Laplaciano ∇^2 en coordenadas polares:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$