MÉTODOS MATEMÁTICOS IV, curso 2009/2010

Convocatoria de septiembre *(9 de septiembre de 2010)*

♣ Hacer constar en cada hoja el nombre y DNI del alumno.

♣ Cada pregunta debe responderse en hoja aparte. La puntuación máxima de cada pregunta se indica entre corchetes.

♣ Tiempo: **4 horas**.

[1.65] 1) Sea la curva que surge de la intersección de una esfera $x^2+y^2+z^2=1$ y un cilindro $x^2+y^2=x$.

[0.35] a) Demuestra que esta curva es la misma que resulta de la intersección de un cono $z^2=(x-1)^2+y^2$ y un cilindro parabólico $z^2=1-x$.

[0.6] b) Representa gráficamente la curva. *[Sugerencia: utiliza la información del enunciado.]*

[0.7] c) Encuentra una parametrización regular de la curva y calcula la curvatura. ¿En qué puntos es máxima? *[Sugerencia: no lleves la curva a su parametrización natural.]*

[1.65] 2) Sexa a superficie correspondente ao cono cuádrico

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{(z-c)^2}{c^2}\,, \quad c>0\,,$$

con $x,y\geq 0$ e $0\leq z\leq c$. Comprobar o teorema de Stokes para o campo vectorial $\vec{F}=-y^3\,\vec{e}_1+x\,\vec{e}_2+\mathrm{e}^{-z}\,\vec{e}_3$ definido nesta superficie.

[1.4] 3) Sexa a ecuación diferencial

$$x^2\frac{d^2y(x)}{dx^2}+2x\frac{dy(x)}{dx}-n(n+1)y(x)=\mathrm{e}^{-x},$$

con condicións de contorno $y(0)=0=y'(\infty)$, $0\leq x<\infty$ e n un número natural.

i) Atopa a función de Green e a solución do problema para $n>0$.

ii) ¿Qué sucede para $n=0$?

Nota: $\Gamma(p,x)=\int_x^\infty dt\, e^{-t}\,t^{p-1}$.

[1.6] 4) Dada la ecuación diferencial

$$y''-2xy'=0\,.$$

[1.0] a) Obtén la solución general usando el método de series de potencias.

[0.6] b) Comprueba el resultado integrando la ecuación directamente.

[1.2] 5) A partir de la funcional generatriz

$$e^{\frac{1}{2}x\left(z-\frac{1}{z}\right)} = \sum_{n\in \boldsymbol{Z}} z^n \, J_n(x),$$

obtén la expresión de las funciones de Bessel $J_n(x)$ como series de potencias. Comprueba que las expresiones resultantes cumplen la ecuación

$$x^2 J_n'' + x J_n' + (x^2 - n^2) J_n = 0,$$

y deduce la relación existente entre $J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$.

[Sugerencia: Desarrolla en serie las exponenciales $e^{\frac{1}{2}xz}$ *y* $e^{-\frac{1}{2}\frac{x}{z}}$*, y distingue claramente los casos* $n \geq 0$ *y* $n < 0$*.]*

[1] 6) Considérese la ecuación diferencial en derivadas parciales:

$$x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} + xy u_x + y^2 u_y = 0$$

[0.2] a) Determinar de que tipo (parabólica, hiperbólica o elíptica) es la ecuación.

[0.4] b) Obtener la ecuación en forma canónica.

[0.4] c) Obtener la solución general de esta ecuación.

[1.5] 7) Utilizando el método de separación de variables, resuelve la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \, u(r,\theta) = 0$$

en un cuarto de disco de radio unidad, esto es, donde $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, y con las condiciones de frontera

$$u(0,\theta)\,\text{no divergente}\ , \qquad u(1,\theta) = \operatorname{sen} 3\theta \cos 3\theta\ , \qquad u(r,0) = 0\ , \quad u(r,\frac{\pi}{2}) = 0\ .$$

Nota 1: El Laplaciano ∇^2 en coordenadas polares:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

Nota 2: Recuerda las identidades trigonométircas:

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cos(a)\ ,$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)\ .$$