MÉTODOS MATEMÁTICOS IV, curso 2010/2011

Convocatoria de septiembre *(9 de septiembre de 2011)*

♣ Hacer constar en cada hoja el nombre y DNI del alumno.

♣ Cada pregunta debe responderse en hoja aparte. La puntuación máxima de cada pregunta se indica entre corchetes.

♣ Tiempo: **4 horas**.

[1.6] 1) Demuestra que la imagen de la curva dada por $\theta(t) = 2\arctan t$, $\phi(t) = \log t$, $t > 0$, sobre la esfera de radio unidad,

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = \sin\theta\,\cos\phi\,\mathbf{e_1} + \sin\theta\sin\phi\,\mathbf{e_2} + \cos\theta\,\mathbf{e_3}\ ,$$

donde θ es el ángulo polar y ϕ el azimutal, $\theta \in [0, \pi]$ y $\phi \in [0, 2\pi)$, corta los meridianos en un ángulo constante. ¿Cuánto vale dicho ángulo? ¿Cúal es la longitud total de la curva? Demuestra que la curvatura es mayor o igual que uno en cualquier punto de la curva.

[Recordar que $\frac{d}{dt}\arctan t = \frac{1}{t^2+1}$*].*

[1.7] 2) Sexa a superficie correspondente ao cono cuádrico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(z-c)^2}{c^2}\ , \quad c > 0\ ,$$

con $x, y \geq 0$ e $0 \leq z \leq c$. Comproba o teorema de Stokes para o campo vectorial

$$\mathbf{F} = -y^3\,\mathbf{e_1} + x\,\mathbf{e_2} + \mathrm{e}^{\,-z}\,\mathbf{e_3}$$

definido nesta superficie.

[1.4] 3) Sexa a ecuación diferencial

$$x^2\frac{d^2y(x)}{dx^2} + x\frac{dy(x)}{dx} + \lambda y(x) = 0,$$

con condicións de contorno $y(1) = 0 = y(e)$, $1 \leq x \leq e$.

- Atopa os seus autovalores e as correspondentes autofuncións.
- Obtén a forma de Sturm-Liouville.
- Amosa a ortogonalidade das autofuncións correspondentes a autovalores distintos.

[1.6] 4) Para la ecuación diferencial

$$3x\frac{d^2y(x)}{dx^2}+\frac{dy(x)}{dx}+6x\ln(1+x)\,y(x)=0\,,\qquad x\geq 0\,;$$

a) Da la relación de recurrencia entre los coeficientes de las series que son solución de la ecuación en torno al punto regular singular $x_0 = 0$.

b) Indica los tres primeros términos no nulos de cada una de las soluciones en serie. ¿Son linealmente independientes?

[1.2] 5) Partiendo de la función generatriz de los polinomios de Laguerre,

$$g(x,z)=\frac{e^{-xz/(1-z)}}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)\,z^n,$$

obtén la relación de recurrencia entre $L_{n+1}(x)$, $L_n(x)$ y $L_{n-1}(x)$.

[1.0] 6) Considera la ecuación diferencial en derivadas parciales:

$$x^2u_{xx}+2xyu_{xy}+y^2u_{yy}+xyu_x+y^2u_y=0$$

a) Determina de qué tipo (parabólica, hiperbólica o elíptica) es la ecuación.

b) Obtén la ecuación en forma canónica.

c) Obtén la solución general de esta ecuación.

[1.5] 7) Utilizando el método de separación de variables, resuelve la ecuación de Laplace

$$\nabla^2\,u(r,\theta)=0$$

en un cuarto de disco de radio unidad, esto es, donde $0\leq r\leq 1$, $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$, y con las condiciones de frontera

$$u(0,\theta)\,\text{no divergente}\ ,\qquad u(1,\theta)=\operatorname{sen}6\theta\ ,\qquad u(r,0)=0\ ,\quad u(r,\frac{\pi}{2})=0\ .$$

NOTA: Laplaciano ∇^2 en coordenadas polares:

$$\nabla^2u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}$$