

PROBLEMAS DE MÉTODOS MATEMÁTICOS IV

Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

Boletín 1

1. Hallar las soluciones de las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden:

i. $3u_x - 4u_y + 2u = 7$ $u(x, 0) = e^x$

ii. $u_x + u_y - u = e^x$ $u(x, 0) = 0$

iii. $y^2 u_x - x^2 u_y = 0$

iv. $u_x + x u_y = u^2$ $u(x, 0) = 1, x > 0$

v. $u u_x - y u_y = x$ $u(2s, s) = 0$

2. Mostrar que la ecuación $u_x + u_y = 1$ con la condición $u(x, x) = x^2$, no tiene solución.

3. Si u satisface la ecuación $(2y + 1) u_x + u_y = u$, mostrar que $v = e^{-y} u$ satisface $(2y + 1) v_x + v_y = 0$. Entonces, encontrar la solución de la ecuación original sujeta a $u(x, 0) = x$.

4. Demostrar que la solución de la ecuación $a(u) u_x + u_y = 0$, sujeta a $u(x, 0) = u_0(x)$, está definida, de manera implícita, por $u = u_0(x - a(u)y)$, siempre que se verifique que $1 + u'_0(x - a(u)y) a'(u) y \neq 0$.

5. Una población estructurada según su edad en la que los individuos de mayor edad mueren más rápido que los jóvenes y ningún individuo sobrepasa la edad $x = L$, puede modelarse por el problema de valores iniciales

$$u_x + u_t = -\frac{c}{L-x} u, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

con $u(0, t) = b(t)$ y $u(x, 0) = f(x)$. Usar el método de Lagrange para encontrar la densidad de población según su edad $u(x, t)$ y dar una interpretación física de la constante positiva c y de las funciones positivas $b(t)$ y $f(x)$. (Opcional: si $c = 1$, $L = 100$, $f(x) = 1000$ y $b(t) = t$, analizar el comportamiento de la población. Se extingue?)