Problemas de Métodos Matemáticos IV

Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

`Boletín 2`

6. Mostrar que la ecuación de segundo orden,

$$a_{11}(x,y)\ u_{xx} + 2a_{12}(x,y)\ u_{xy} + a_{22}(x,y)\ u_{yy} + F\left(x,y,u,u_x,u_y\right) = 0$$

después del cambio de variables $(x,y) \to (\xi,\eta)$, adopta la forma

$$\tilde{a}_{11}(\xi,\eta)\ u_{\xi\xi} + 2\tilde{a}_{12}(\xi,\eta)\ u_{\xi\eta} + \tilde{a}_{22}(\xi,\eta)\ u_{\eta\eta} + \tilde{F}\left(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta\right) = 0$$

donde las nuevas funciones $\tilde{a}_{11}$, $\tilde{a}_{12}$, $\tilde{a}_{22}$ y $\tilde{F}$, se escriben

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{11} &= a_{11}\ \xi_x^2 + 2a_{12}\ \xi_x\xi_y + a_{22}\ \xi_y^2 \qquad \tilde{a}_{22} = a_{11}\ \eta_x^2 + 2a_{12}\ \eta_x\eta_y + a_{22}\ \eta_y^2 \\
\tilde{a}_{12} &= a_{11}\ \eta_x\xi_x + a_{12}(\eta_x\xi_y + \eta_y\xi_x) + a_{22}\ \eta_y\xi_y \\
\tilde{F} &= F + a_{11}(u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx}) + 2a_{12}(u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy}) + a_{22}(u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy})
\end{aligned}$$

7. Estudiar las zonas en las que es de tipo hiperbólico, parabólico o elíptico, la ecuación

$$(\ell + x)\ u_{xx} + 2xy\ u_{xy} - y^2\ u_{yy} = 0 \qquad \ell \in \mathbb{R}$$

8. Clasificar y reducir a su forma canónica:

   i. $u_{xx} + x\ u_{yy} = 0$

   ii. $y\ u_{xx} + x\ u_{yy} = 0$

   iii. $y^2\ u_{xx} + 2xy\ u_{xy} + x^2\ u_{yy} = 0$

   iv. $(1+x^2)\ u_{xx} + (1+y^2)\ u_{yy} + x\ u_x + y\ u_y = 0$

9. Una cuerda no acotada con velocidad de propagación de las ondas transversales $c = 2$ y sus condiciones iniciales son $u(x,0) = \cos\ x$ y $u_t(x,0) = \text{sen}\ x$, calcular el movimiento de la cuerda.

10. Hallar la solución de la ecuación

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$$

que satisface las condiciones de contorno $u(x,0) = 3x^2$ y $u_y(x,0) = 0$