Problemas de Métodos Matemáticos IV

Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

Boletín 3

11. Resolver el movimiento de una cuerda de longitud L *punteada*:

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{hx}{a} & 0 \le x \le a \\ \frac{h(L-x)}{L-a} & a \le x \le L \end{cases} , \qquad u_t(x,0) = 0 ,$$

con sus extremos fijos, $u(0,t) = u(L,t) = 0$. ¿Qué pasa cuando $h = a = L/2$?

12. Describir el movimiento si la cuerda de extremos fijos, en cambio, es *golpeada*,

$$u(x,0) = 0 , \qquad u_t(x,0) = \begin{cases} \frac{v_0 x}{a} & 0 \le x \le a \\ \frac{v_0(L-x)}{L-a} & a \le x \le L \end{cases} .$$

13. Tomando $u(x,t) = v(x,t)\, e^{ax+bt}$ y eligiendo a y b para que la ecuación transformada sea la de ondas, hallar la solución al problema de Cauchy:

$$u_{tt} - u_{xx} - k\,(u_t + u_x) = 0 , \qquad -\infty < x < \infty , \quad t > 0 ,$$

con las condiciones iniciales $u(x,0) = h_0(x)$ y $u_t(x,0) = h_1(x)$.

14. Si tenemos en cuenta el término de fricción con el aire de una cuerda vibrante de longitud L, la ecuación de movimiento puede aproximarse del modo siguiente

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} - b\, u_t = 0 ,$$

con $b > 0$. Si suponemos las condiciones iniciales

$$u(x,0) = 0 , \qquad u_t(x,0) = k \cos\frac{3\pi x}{2L} ,$$

y de frontera: $u_x(0,t) = u(L,t) = 0$, hallar el movimiento de la cuerda.

15. Mostrar que el Laplaciano ∇^2, adopta las siguientes expresiones:

i. en coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

ii. en coordenadas esféricas

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2 \mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$$