Problemas de Métodos Matemáticos IV

Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

Boletín 4

16. Mostrar que el problema de Neumann en una región D ($S = \partial D$),

$$\nabla^2 u = f \ , \qquad\qquad \hat{n} \cdot \vec{\nabla} u \Big|_S = g \ ,$$

no tiene solución si no se satisface la condición de consistencia:

$$\int_D f \, d\tau = \int_S g \, d\sigma \ .$$

Si ésta se cumple, demostrar que cualquier par de soluciones difiere en una constante.

17. Una pompa de jabón (que se considera una membrana elástica, homogénea e isótropa) se apoya sobe un alambre de forma rectangular con lados de longitudes 1 y 2. El rectángulo es plano, salvo en uno de sus lados cortos que se ha ondulado con la forma $h(x) = \text{sen}(\pi x) + \text{sen}(3\pi x)$, $x \in [0, 1]$. Suponiendo la pompa en reposo, calcular su forma (dictada por la ecuación de Laplace).

18. Resolver el problema de Neumann, $\nabla^2 u = 0$, $u_r(1, \theta) = f(\theta)$, en el círculo de radio unidad, tal que

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) \, d\theta = 0 \ , \qquad\qquad \int_0^{2\pi} u(1, \theta) \, d\theta = 0 \ .$$

Escribir la fórmula integral de Poisson correspondiente.

$$\left(\text{Ayuda :} \qquad \log(1 - z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \ , \qquad 0 \leq |z| < 1 \right)$$

19. Si $u_{xx} + u_{yy} = 0$ en $x^2 + y^2 < 1$, con $u = y^2 x$ sobre $x^2 + y^2 = 1$, encontrar $u(0, 0)$.

20. Mostrar que la aplicación conforme

$$w = \text{sen} \frac{\pi z}{2b} \ ,$$

transforma la región $R_z \equiv \{z = x + iy, -b \leq x \leq b, y \geq 0\}$ en el semiplano superior. Resolver, entonces, el problema de Dirichlet en R_z, con las condiciones de frontera:

$$u(-b, y) = T \ , \qquad\qquad u(x, 0) = 0 \ , \qquad\qquad u(b, y) = 2T \ .$$