

PROBLEMAS DE MÉTODOS MATEMÁTICOS IV

Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

Boletín 5

21. Mostrar que la solución de la ecuación del calor para una barra de longitud L aislada térmicamente en los extremos es

$$u(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^L f(\xi) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi \xi}{L}\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 k}{L^2} t}$$

si las condiciones iniciales son $u(x, 0) = f(x)$.

22. Si la barra del problema anterior está aislada en uno de sus extremos y sometida a temperatura cero en el otro, $u(0, t) = u_x(L, t) = 0$, $t > 0$, mostrar que

$$u(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L f(\xi) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi \xi}{2L}\right) e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 k}{4L^2} t}$$

23. Resolver $u_t = u_{xx}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$, sujeta a las condiciones:

$$u(0, t) = u(\pi, t) + u_x(\pi, t) = 0, \quad t > 0 \quad u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < \pi.$$

24. Resolver $u_t = 2u_{xx} + 4x$, $0 < x < \pi$, $t > 0$, sujeta a las condiciones:

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t > 0 \quad u(x, 0) = \sin(x), \quad 0 < x < \pi.$$

25. Encontrar la solución de la ecuación del calor en una región rectangular

$$u_t = \beta(u_{xx} + u_{yy}), \quad 0 < x < L_x, \quad 0 < y < L_y, \quad t > 0,$$

con las siguientes condiciones de contorno

$$u_x(0, y, t) = u_x(L_x, y, t) = 0, \quad 0 < y < L_y, \quad t > 0$$

$$u(x, 0, t) = u(x, L_y, t) = 0, \quad 0 < x < L_x, \quad t > 0$$

y la condición inicial

$$u(x, y, 0) = \sin^2\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L_y}\right), \quad 0 < x < L_x, \quad 0 < y < L_y.$$