Problemas de Métodos Matemáticos IV

Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

Boletín 6

26. Encontrar una función armónica en el cuadrado de lado π, que satisface:

$$u(x,0) = x \ , \quad u(x,\pi) = 0 \ , \qquad 0 \le x \le \pi \ ,$$

$$u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = 0 \ , \qquad 0 \le y \le \pi \ .$$

27. La ecuación de un fluído no viscoso, incompresible e irrotacional, en flujo laminar y regimen estacionario, es $\nabla^2 u = 0$, donde u es el potencial de velocidades ($\vec{v} = \vec{\nabla} u$). Calcular $u(\vec{x})$ para un fluído que rodea un cilindro macizo de radio a y longitud infinita. El fluído, a grandes distancias del cilindro, fluye con velocidad constante v en dirección perpendicular al eje. La condición de contorno en la superficie del cilindro es que la velocidad normal (radial) se anula.

28. Resolver el problema de Dirichlet en una región anular

$$\nabla^2 u = 0 \ , \qquad 1 \le r \le 2 \ , \quad -\pi \le \theta \le \pi \ ,$$

con las condiciones de frontera

$$u(1,\theta) = \operatorname{sen} 4\theta - \cos\theta \ , \qquad u(2,\theta) = \operatorname{sen}\theta \ .$$

29. Encontrar el movimiento de oscilación de una membrana elástica rectangular de lados π y 2π, cuyo borde se encuentra fijamente adherido a un marco rígido, sujeta a las condiciones iniciales:

$$u(x,y,0) = f(x,y) \ , \quad u_t(x,y,0) = g(x,y) \ , \qquad 0 \le x \le \pi \ , \quad 0 \le y \le 2\pi \ .$$

30. Probar que la solución $u(r,\theta)$ de la ecuación de Laplace en la región semicircular, $r \le a$, $0 \le \theta \le \pi$, que se anula en $\theta = 0$ y toma el valor constante A en $\theta = \pi$ y sobre la frontera curvada $r = a$, es

$$u(r,\theta) = \frac{A}{\pi}\left[\theta + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n \frac{\operatorname{sen} n\theta}{n}\right] .$$