MÉTODOS MATEMÁTICOS IV, curso 2007/2008

Problemas 7 y 8 del Examen Final *(11 de junio de 2008)*

7) Sea Γ un círculo de radio unidad, $R = 1$, y $\partial\Gamma$ su frontera.

- Si u satisface la ecuación de Laplace en el interior de Γ y su valor en $\partial\Gamma$ es $u(\partial\Gamma) = 3\,\mathrm{sen}\,\theta + 1$, ¿cuál es el valor máximo de u en Γ? ¿Cuánto vale u en el centro de Γ?
- Encuentra la solución de $\nabla^2 v = 1$ en el interior de Γ, tal que $v(\partial\Gamma) = 0$.

- Si u satisface la ecuación de Laplace en el interior de Γ, tiene sus valores máximo y mínimo en $\partial\Gamma$. Es suficiente, entonces, calcular el máximo de $3\,\mathrm{sen}\,\theta + 1$, que tiene lugar cuando $\mathrm{sen}\,\theta$ es máximo, es decir, $\theta = \pi/2$. Por lo tanto, $\boxed{\text{máx.}u = 4}$

  Siendo u una función armónica, satisface el teorema del valor medio:

$$u(\text{centro}) = \frac{1}{2\pi}\oint_{\partial\Gamma} u\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(3\,\mathrm{sen}\,\theta + 1)\,d\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{u(\text{centro}) = 1}$$

  ya que la integral del seno se anula en un período.

- Al ser una ecuación inomhogénea, $v = v^{(h)} + v^{(p)}$, donde $v^{(h)}$ es la solución general de la homogénea (ecuación de Laplace) y $v^{(p)}$ es una particular de la inhomogénea. Empecemos por esta última.

$$\nabla^2 v^{(p)} = v^{(p)}_{xx} + v^{(p)}_{yy} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad v^{(p)} = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)\ ,$$

  es una solución sencilla (cualquiera vale!) que, además, no dificulta la implementación de las condiciones de contorno.[1] Como $v^{(p)}(\partial\Gamma) = 1/4$, entonces $v^{(h)}(\partial\Gamma) = -1/4$. Es decir, $v^{(h)}$ es una función armónica en Γ que toma un valor constante $-1/4$ en la frontera. Por el teorema del valormáximo/mínimo,

$$v^{(h)} = -\frac{1}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v = \tfrac{1}{4}(r^2 - 1)}$$

---

8) Resuelve la ecuación

$$x^2\,u_{xx} - 2x\,u_{xy} + \frac{3}{4}\,u_{yy} + \frac{1}{2}\,u_y = 0\ , \qquad x > 1\ ,$$

sujeta a las condiciones de frontera $u(1, y) = 0$ y $u_x(1, y) = 1$.

Teniendo en cuenta que $a_{11} = x^2$, $a_{12} = -x$ y $a_{22} = 3/4$,

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}\,a_{22} = (-x)^2 - \frac{3}{4}\,x^2 = \frac{1}{4}x^2 > 0\ ,$$

[1] Si trabajo en polares, sin incluir dependencia en θ (es innecesaria por simetría!), $\nabla^2 v^{(p)} = v^{(p)}_{rr} + \frac{1}{r}\,v^{(p)}_r = 1$, entonces $v^{(p)} = \frac{1}{4}r^2$.

en la región de interés ($x > 1$). Se trata de una ecuación hiperbólica. Llevémosla a la forma canónica. Para ello tenemos que calcular

$$-\lambda_1 = \frac{-a_{12} + \sqrt{\Delta}}{a_{11}} = \frac{x + \frac{1}{2}x}{x^2} = \frac{3}{2x} \ , \qquad -\lambda_2 = \frac{-a_{12} - \sqrt{\Delta}}{a_{11}} = \frac{x - \frac{1}{2}x}{x^2} = \frac{1}{2x} \ ,$$

y calcular las curvas características

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2\,x} \quad \Rightarrow \quad dy = -\frac{3}{2}\,\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \varphi_1(x,y) = y + \frac{3}{2}\,\log x = \text{cte} \ ,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2\,x} \quad \Rightarrow \quad dy = -\frac{1}{2}\,\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \varphi_2(x,y) = y + \frac{1}{2}\,\log x = \text{cte} \ .$$

Ahora, para llevar la ecuación a su forma canónica, es suficiente con elegir

$$\xi(x,y) = \varphi_1(x,y) = y + \frac{3}{2}\,\log x \ , \qquad \eta(x,y) = \varphi_2(x,y) = y + \frac{1}{2}\,\log x \ ,$$

y escribir la ecuación diferencial que satisface $u(\xi,\eta)$. Para ello, teniendo en cuenta que

$$\xi_x = \frac{3}{2x} \ , \qquad \eta_x = \frac{1}{2x} \ , \qquad \xi_y = \eta_y = 1 \ ,$$

vemos que:

$$u_x = u_\xi\,\xi_x + u_\eta\,\eta_x = \frac{1}{2x}\,(3\,u_\xi + u_\eta) \ , \qquad u_y = u_\xi\,\xi_y + u_\eta\,\eta_y = u_\xi + u_\eta \ ,$$

y las segundas derivadas

$$\begin{aligned}
u_{xx} &= -\frac{1}{2x^2}\,(3\,u_\xi + u_\eta) + \frac{1}{2x}\,(3\,u_{\xi x} + u_{\eta x}) \\
&= -\frac{1}{2x^2}\,(3\,u_\xi + u_\eta) + \frac{1}{2x}\left(3\left[\frac{1}{2x}(3\,u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta})\right] + \left[\frac{1}{2x}(3\,u_{\eta\xi} + u_{\eta\eta})\right]\right) \\
&= \frac{1}{x^2}\left(\frac{9}{4}\,u_{\xi\xi} + \frac{3}{2}\,u_{\xi\eta} + \frac{1}{4}\,u_{\eta\eta} - \frac{3}{2}\,u_\xi - \frac{1}{2}\,u_\eta\right) \\
u_{xy} &= \frac{1}{2x}\,(3\,u_{\xi y} + u_{\eta y}) = \frac{1}{2x}(3\,[u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}] + [u_{\eta\xi} + u_{\eta\eta}]) \\
&= \frac{1}{2x}\,(3\,u_{\xi\xi} + 4\,u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) \\
u_{yy} &= u_{\xi y} + u_{\eta y} = u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta} + u_{\eta\xi} + u_{\eta\eta} = u_{\xi\xi} + 2\,u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \ .
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$x^2\,u_{xx} - 2x\,u_{xy} + \frac{3}{4}\,u_{yy} + \frac{1}{2}\,u_y = \left(\frac{9}{4}\,u_{\xi\xi} + \frac{3}{2}\,u_{\xi\eta} + \frac{1}{4}\,u_{\eta\eta} - \frac{3}{2}\,u_\xi - \frac{1}{2}\,u_\eta\right)$$

$$-(3\,u_{\xi\xi} + 4\,u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) + \frac{3}{4}(u_{\xi\xi} + 2\,u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) + \frac{1}{2}(u_\xi + u_\eta) = -u_{\xi\eta} - u_\xi = 0 \ .$$

En su primera forma canónica, la ecuación adquiere, como vemos, una forma muy sencilla! De hecho, podemos integrar en η,

$$u_{\xi\eta} + u_\xi = 0 \quad \Rightarrow \quad u_\xi = F(\xi)\, e^{-\eta} \ ,$$

donde $F(\xi)$ es una función a determinar, y luego integrar en ξ,

$$u_\xi = F(\xi)\, e^{\eta} \quad \Rightarrow \quad u(\xi,\eta) = G(\xi)\, e^{-\eta} + H(\eta) \ ,$$

donde $H(\eta)$ será determinada por las condiciones de frontera, y $G(\xi)$ es la integral de $F(\xi)$ (aunque este dato resulta irrelevante!). Escribiendo la solución general en las variables originales,

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-y}\, G\left(y + \frac{3}{2}\, \log x\right) + H\left(y + \frac{1}{2}\, \log x\right) \ , \tag{1}$$

donde usamos que $e^{-(y+\frac{1}{2}\,\log x)} = \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-y}$. Ahora imponemos las condiciones de frontera. Para ello calculamos,

$$u_x(x,y) = -\frac{1}{2x^{3/2}}\, e^{-y}\, G\left(y + \frac{3}{2}\, \log x\right) + \frac{3}{2x^{3/2}}\, e^{-y}\, G'\left(y + \frac{3}{2}\, \log x\right) + \frac{1}{2x}\, H'\left(y + \frac{1}{2}\, \log x\right) \ .$$

Por lo tanto, las condiciones de frontera resultan:

$$u(1,y) = e^{-y}\, G(y) + H(y) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad H(y) = -e^{-y}\, G(y) \ ,$$

$$u_x(1,y) = -\frac{1}{2}\, e^{-y}\, G(y) + \frac{3}{2}\, e^{-y}\, G'(y) + \frac{1}{2}\, H'(y) = 1 \ ,$$

pero como $H(y) = -e^{-y}\, G(y)$, entonces $H'(y) = -e^{-y}\, (G'(y) - G(y))$ y la segunda condición de frontera resulta

$$e^{-y}\, G'(y) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad G(y) = e^{y} \quad \Rightarrow \quad H(y) = -1 \ .$$

Reemplazando en (1),

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-y}\, x^{3/2}\, e^{y} - 1 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{u(x,y) = x - 1}$$

ya que $e^{y+\frac{3}{2}\,\log x} = x^{3/2}\, e^{y}$.