MÉTODOS MATEMÁTICOS IV, curso 2007/2008

Problemas 6 y 7 del Examen Final *(9 de septiembre de 2008)*

6) Considera la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$y\,u_x - u_y = x\,u\ .$$

1. Encuentra $u(x,y)$, sabiendo que la función, en el eje x, vale x^3.
2. Escribiendo $u = f\,e^{\Phi}$, donde $y\,f_x - f_y = 0$, encuentra la solución general de la ecuación anterior.
3. Muestra que si las condiciones de frontera están sobre la curva $x = -y^2/2$, el problema está mal definido.

La ecuación diferencial de primer orden puede resolverse por el método de Lagrange.

1. Debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x_t = y\ , \qquad y_t = -1\ , \qquad u_t = x\,u\ ,$$

con las condiciones iniciales, $u(x,0) = x^3$, parametrizadas del siguiente modo:

$$x(0,s) = s\ , \qquad y(0,s) = 0\ , \qquad u(0,s) = s^3\ .$$

Es inmediato ver que $y_t = -1 \ \Rightarrow\ y(t,s) = -t + a(s)$, pero $y(0,s) = a(s) = 0$,

$$y(t,s) = -t\ .$$

A partir de $x_t = y \ \Rightarrow\ x(t,s) = -\frac{t^2}{2} + b(s)$, pero $x(0,s) = b(s) = s$,

$$x(t,s) = -\frac{t^2}{2} + s\ .$$

Podemos despejar trivialmente las expresiones de $t(x,y)$ y $s(x,y)$,

$$t(x,y) = -y\ , \qquad s(x,y) = x + \frac{y^2}{2}\ .$$

Sólo nos falta integrar la última ecuación:

$$u_t = x\,u = \left(-\frac{t^2}{2} + s\right) u \quad \Rightarrow \quad \log\,u = -\frac{t^3}{6} + s\,t + c(s)\ .$$

Usando las condiciones iniciales, $u(0,s) = e^{c(s)} = s^3$, por lo que

$$u(t,s) = s^3\,e^{-\frac{t^3}{6} + s\,t} \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = \left(x + \frac{y^2}{2}\right)^3 e^{-y\left(x + \frac{y^2}{3}\right)}\ ,$$

tras una simplificación trivial.

2. La solución general de la ecuación $y\, f_x - f_y = 0$ puede obtenerse a partir de la curva integral

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad x + \frac{y^2}{2} = \text{cte.} \ ,$$

de la que se deduce:

$$f(x,y) = \mathcal{F}\left(x + \frac{y^2}{2}\right) \ .$$

Ahora, reemplazando $u = f\, e^{\Phi}$ en la ecuación diferencial:

$$\left[y\,(f_x + f\,\Phi_x) - (f_y + f\,\Phi_y)\right] e^{\Phi} = x\, f\, e^{\Phi} \quad \Rightarrow \quad y\,\Phi_x - \Phi_y = x \ .$$

La solución de la ecuación homogénea es de la misma forma que f y, de hecho, puede ser absorbida en la función $\mathcal{F}$, aún por determinar. Sólo queda encontrar una solución particular. Por inspección, tiene que tener un término $-x\,y$, para obtener el miembro de la derecha. Es fácil ver que se requiere otro término, dependiente de y, que compense la derivada respecto de x del anterior,

$$\Phi(x,y) = -x\,y - \frac{y^3}{3} \ .$$

La solución general, entonces, tiene la forma

$$u(x,y) = \mathcal{F}\left(x + \frac{y^2}{2}\right) e^{-y\left(x + \frac{y^2}{3}\right)} \ .$$

Notar que esta forma de la solución coincide con la obtenida en el punto anterior, en el caso particular $\mathcal{F}(z) = z^3$.

3. Si se quiere imponer las condiciones de frontera, $u = g$ para una función dada, sobre la curva $\mathcal{C} : x = -y^2/2$, vemos que

$$u(x,y)\Big|_{\mathcal{C}} = \mathcal{F}(0)\, e^{\frac{y^3}{6}} = g(x,y)\Big|_{\mathcal{C}} \equiv \tilde{g}(y) \ ,$$

lo que, o bien no tiene solución (si $\tilde{g}(y) \neq \mathcal{F}(0)\, e^{y^3/6}$), o tiene infinitas soluciones (si $\tilde{g}(y) = \mathcal{F}(0)\, e^{y^3/6}$, ya que son infinitas las funciones $\mathcal{F}$ que son iguales en un punto). Este comportamiento patológico se debe a que la curva $\mathcal{C}$ de las condiciones de frontera es característica.

---

7) Considera la ecuación del calor en una placa rectangular de largos π y 3π,

$$u_t = u_{xx} + u_{zz} \ , \qquad x \in (0,\pi) \ , \quad z \in (0, 3\pi) \ ,$$

en la que dos de sus lados están térmicamente aislados,

$$u_z(x,0,t) = u_z(x,3\pi,t) = 0 \ ,$$

mientras que los otros dos se someten a un baño térmico,

$$u(0,z,t) = u(\pi,z,t) = 0 \ .$$

Si la distribución inicial de temperaturas está dada por

$$u(x,z,0) = 2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2(z/3) \ ,$$

determina la temperatura en todos los puntos de la placa, en cualquier instante.

El problema se puede resolver por separación de variables en dos pasos. Primero, reemplazando $u(x,z,t) = V(x,z)\,T(t)$ en la ecuación del calor,

$$T'(t) = k\,T(t) = 0 \ , \qquad V_{xx}(x,z) + V_{zz}(x,z) - k\,V(x,z) = 0 \ ,$$

siendo k una constante, por el momento, arbitraria. La ecuación de $T(t)$ se resuelve de manera inmediata,

$$T(t) = e^{k\,t} \ .$$

Para resolver la ecuación diferencial en derivadas parciales que satisface $V(x,z)$, debemos separar variables una vez más, $V(x,z) = X(x)\,Z(z)$, de modo que

$$Z''(z) - jZ(z) = 0 \ , \qquad X''(x) - (k-j)X(x) = 0 \ ,$$

donde j es otra constante. Teniendo en cuenta que $u(x,z,t) = X(x)\,Z(z)\,T(t)$ y $u_z(x,z,t) = X(x)\,Z'(z)\,T(t)$, las condiciones de frontera homogéneas son las siguientes: $X(0) = X(\pi) = Z'(0) = Z'(3\pi) = 0$. Si $j > 0$, la solución $Z(z)$ estaría dada por dos exponenciales reales, lo que no satisface las condiciones de frontera. Entonces, $j = -\ell^2 \leq 0$ y la solución de dicha ecuación es $Z(z) = a \cos \ell z + b \operatorname{sen} \ell z$. Así, $Z'(z) = -a \operatorname{sen} \ell z + b \cos \ell z$, por lo que $Z'(0) = 0 \Rightarrow b = 0$ y $Z'(3\pi) = -a \operatorname{sen} 3\pi\ell = 0 \Rightarrow \ell = \frac{m}{3}$ con $m \in \mathbb{Z}$. En síntesis, el conjunto de soluciones linealmente independientes es:

$$Z_m(z) = a_m \cos \frac{mz}{3} \ , \quad m \in \mathbb{N} \ ,$$

ya que $Z_{-m}(z) = Z_m(z)$. La ecuación de $X(x)$ tiene la misma forma y se resuelve de manera idéntica: nuevamente $k - j = -\tilde{\ell}^2 \leq 0$, y la solución es, en general, $X(x) = c \cos \tilde{\ell} x + d \operatorname{sen} \tilde{\ell} x$, sujeta a las condiciones de frontera $X(0) = 0 \Rightarrow c = 0$, y $X(\pi) = d \operatorname{sen} \tilde{\ell}\pi = 0 \Rightarrow \tilde{\ell} = n$, con $n \in \mathbb{Z}$ (y $n \neq 0$, de otro modo, la solución sería idénticamente nula, lo que no satisface la condición inicial). Las soluciones linealmente independientes son, pues:

$$X_n(x) = d_n \operatorname{sen} nx \ , \quad n \in \mathbb{N}^\star \ ,$$

ya que $X_{-n}(x) = -X_n(x)$. Por último, podemos ver que la constante k resulta $k = j - \tilde{\ell}^2 = -(\ell^2 + \tilde{\ell}^2) = -\left(n^2 + \frac{m^2}{9}\right)$. La solución general es, pues,

$$u(x,z,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \operatorname{sen} nx \cos \frac{mz}{3}\, e^{-\left(n^2 + \frac{m^2}{9}\right) t} \ .$$

Resta imponer la condición inicial:

$$u(x,z,0) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\,\operatorname{sen} nx\,\cos\frac{m\,z}{3} = 2\,\operatorname{sen} x\,\operatorname{sen}^2\frac{z}{3}\ .$$

de la que resulta evidente que A_{mn} son los coeficients del desarrollo de $u(x,z,0)$ en una serie doble de Fourier. Ahora, usando la identidad trigonométrica $2\,\operatorname{sen}^2\theta = (1-\cos 2\theta)$, la ecuación anterior se escribe:

$$u(x,z,0) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\,\operatorname{sen} nx\,\cos\frac{mz}{3} = \left(1-\cos\frac{2z}{3}\right)\operatorname{sen} x\ ,$$

de donde es evidente que $A_{01} = 1 = -A_{21}$ y todos los demás A_{mn} son nulos. La solución del problema, entonces, es la función

$$u(x,z,t) = \left[1-\cos\frac{2z}{3}\,e^{-\frac{4}{9}t}\right]\operatorname{sen} x\,e^{-t}\ .$$